TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik Institut für Regelungs - und Steuerungstheorie

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl. Math. Klaus Röbenack

Analyse und Entwurf von Mehrgrößenregelung im Frequenzbreich*

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl. Math. Klaus Röbenack

8. Dezember 2014

*Mitschrift von Bolor Khuu

Inhaltsverzeichnis

1 Mehrgrößensysteme in Zustandsraumdarstellung

1.1 Systembeschreibung

Lineare Zustandsraummodelle [1]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ y &= C\,x + D\,u, \qquad C \in \mathbb{R}^{r\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{r\times m} \end{aligned}$$

Typisch:

- $m, r << n$
- oft $m = r$
- $D = 0$ kein Durchgriff

Lösung im Zeitbereich mit Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

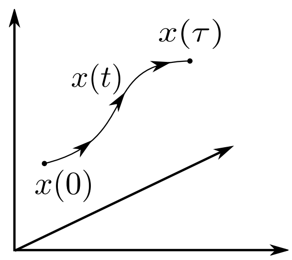
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)d\tau \\ &= \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)B\,u(\tau)d\tau \\ \phi(t) &= e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \Rightarrow \qquad \text{Fundamentalmatrix} \end{aligned}$$

1.2 Kalmankriterium und Steuerbarkeitsindizus

Definition

Ein System heißt vollständig (zustands).-steuerbar, wenn es von jedem Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ in endlicher Zeit $T > 0$ durch geeignete Wahl des Eingangssignal $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem beliebig vorgegebenen Endzustand $\mathbf{x}(t)$ überführt werden kann.

[1] Mitschrift am 22.10.2014



Steuerbarkeitskriterien:

- Kalman
- Hautus
- Gilbert
- Gram

Satz(Kalmanische Steuerbarkeitskriterium)

Das System ist genau dann zustandssteuerbar, wenn die kalmanische Steuerbarkeitsmatrix $Q_s = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ den Rang n besitzt. (voller Zeilenrang)

$$\begin{aligned} (\texttt{Matlab/Octave}) :&Q_s = \texttt{ctrb}(A, B) \\ (\texttt{SciLab}) :&Q_s = \texttt{cont\_mat}(A, B) \end{aligned}$$

SI(single-input, $m = 1$): $Q_s \in \mathbb{R}^{n\times n}$, quadratisch, steuerbar $\iff$ Q_s regulär (invertierbar)
MI(multi-input, $m > 1$): $Q_s \in \mathbb{R}^{n\times nm}$, rechteckig, n-Zeilen, nm-Spalten
maximal n-Spalten können linear unabhängig sein.

Definition

Die kleinste Zahl q mit $\texttt{rang}(B, AB, \dots, A^{q-1}B) = n$ heißt Steuerbarkeitsmatrix von (A, B).
Umordnung/Auswahl der Spalten der Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_A = \Big(b_1, Ab_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{k_2-1}b_2, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{k_m-1}b_m\Big) \quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Auswahlmatrix mit Rang $Q_A = n, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n \qquad (k_1, \dots, k_m)\dots$ Pseudosteuerbarkeitsindizes
Zusammenhang zum Steuerbarkeitsindex $q \leq \max\limits_{1\leq i\leq m} k_i$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} \text{rang}B &= 2 \\ \text{rang}(B, AB) &= 3 \end{aligned}\right\} \text{steuerbar und } q = 2$$
$$\text{rang}(A, AB, A^2B) = 3$$

Ziel

möglichst gleichmäßige Aufteilung der Indizes bzw. Eingänge
Mögliche Steuerbarkeitsindizes $(0,3),(1,2),(2,1),(2,1),(3,0)$

Indizes:	Auswahlmatrix	Rang
$(0,3)$:	$(b_2, Ab_2, A^2b_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3
$(1,2)$:	$(b_1, b_2, b_2A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	3
$(2,1)$:	$(b_1, Ab_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3
$(3,0)$:	$(b_1, Ab_1, A^2b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2

Auswahl der ersten n linear unabhängige Spaltenvektoren der Steuerbarkeitsmatrix (von links nach rechts) $Q_s = (B, AB, \dots) = (b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots)$. ggf. auch Vertauschung der Eingänge zuläßig. Diese Auswahl führt auf die Steuerbarkeitsindizes oder Kronecker Indizes.

Beispiel

(Fortsetzung):

$$Q_s = (B, AB, A^2B) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & AB & A^2B \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{Rang} \Rightarrow \; {\color{red}1} \quad {\color{blue}2} \quad {\color{green}3} \quad 3 \quad 3 \quad 3$$

$Q_A = (b_1, Ab_1, b_2) \sim$ Steuerbarkeitsindizes $(2,1)$

Vertauschung der Eingänge: $n_1 \iff n_2$: $\quad \hat{B} = (b_2, b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\hat{Q}_s = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_2 & b_1 & Ab_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \quad Q_A = (b_1, b_2, Ab_2)$$

$$\text{Rang} = 1 \quad 2 \quad 3 \qquad\qquad \sim (1 \quad 2)$$

Steuerbarkeitsindizes: $(1,2),(2,1)$

Bemerkung

- Steuerbarkeitsindizes kann bis auf Vertauschung eindeutig
- Vertauschung ist nicht immer möglich
- Es gilt: $q = \max\limits_{1 \le i \le m} k_i$

1.3 Entwurf einer Zustandsrückführung mittels Regelungsnormalform

Transformation des Originalsystems[2]

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

in die Regelungsnormalform

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \star & \dots & \dots & \star \end{matrix} & \begin{matrix} & 0 & \\ \star & \dots & \star \end{matrix} & \begin{matrix} & 0 & \\ \star & \dots & \star \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} & 0 & \\ \star & \dots & \star \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \star & \dots & \dots & \star \end{matrix} & \begin{matrix} & 0 & \\ \star & \dots & \star \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} & 0 & \\ \star & \dots & \star \end{matrix} & \begin{matrix} & 0 & \\ \star & \dots & \star \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \star & \dots & \dots & \star \end{matrix}
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \}\,k_1 \\[10em] \}\,k_m \end{array}
\qquad
\bar{B} \overset{?}{=} \left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline
0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \}\,k_1 \\[10em] \}\,k_m \end{array}$$

Rückführung $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \bar{A} - \left(\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 0 \\
\bar{k}_{11} & \star & \bar{k}_{1m} \\ \hline
\star & \star & \star \\ \hline
0 & 0 & 0 \\
\bar{k}_{m1} & \star & \bar{k}_{mm}
\end{array}\right)$$

$$\overset{!}{=} \left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ -p_{1,0} & \dots & \dots & -p_{1,p-1} \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline
0 & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \star & \dots & \dots & \star \end{matrix} & 0 \\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \star & \dots & \dots & \star \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Frobenius Regelmatrix}} \end{matrix}
\end{array}\right)$$

Koeffezienten der gewünschten charakteristischen Polynome.
Transformation:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= T\,x, \qquad T \in \mathbb{R}^{n\times n} \\
\dot{\bar{x}} &= T\,\dot{x} = T(Ax + Bu) \\
&= \underbrace{TAT^{-1}}_{\bar{A}}\bar{x} + \underbrace{TB}_{\bar{B}}\,u
\end{aligned}$$

[2] Mitschrift am 29.10.2014

1. Ansatz für Zustandsrückführung $u = -\bar{k}\bar{x} = -\underbrace{\bar{k}T}_{k} x$

   Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1}^T \\ \vdots \\ t_{1,k_1}^T \\ \hline \vdots \\ \hline t_{m,1}^T \\ \vdots \\ t_{m,k_m}^T \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} k_1 \\ \vphantom{a} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} k_m \end{array}$$

Ähnlichkeitstransformation $TAT^{-1} = \bar{A} \iff TA = \bar{A}T$

$$\begin{pmatrix} t_{1,1}^T \\ t_{1,2}^T \\ \vdots \\ t_{1,k_1}^T \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \cdot A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \cdots \\ & & 0 & 1 & \\ \star & \ldots & \star & \star & \\ \hline & & \vdots & & \ddots \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} t_{1,1}^T \\ t_{1,2}^T \\ \vdots \\ t_{1,k_1}^T \\ \hline \vdots \end{pmatrix}$$

Vergleich liefert $t_{i,j}^T \cdot A = t_{i,j+1}^T$ für $\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k_i-1}$
Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1}^T \\ t_{1,1}^T \cdot A \\ \vdots \\ t_{1,1} \cdot A^{k_1-1} \\ \hline \vdots \\ \hline t_{m,1}^T \\ t_{m,1} \cdot A \\ \vdots \\ t_{m,1}^T \cdot A^{k_m-1} \end{pmatrix}$$

noch zu bestimmen

$$\begin{gathered} t_{1,1}^T =: t_1^T \\ \vdots \\ t_{m,1}^T =: t_m^T \end{gathered}$$

Forderung am Eingangsmatrix:

$$TB = \bar{B} \stackrel{?}{=} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \vdots & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 1 & & \\ \hline & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ & 1 & \\ \hline & & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & 0 \\ & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} k_1 \\ \vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} k_1 \end{array}$$

Für einen Block

$$\mathbb{R}^{k_i} \ni e_{k_i} = \begin{pmatrix} t_i^T \\ t_i^T \cdot A \\ \vdots \\ t_i^T \cdot A^{k_i-1} \end{pmatrix} \cdot b_i$$

Zeilenweise für $i-$tes Teilsystem:

$$t_i^T \cdot (b_i, Ab_i, \dots, A^{k_i-1} b_i) = e_{k_i}^T$$

Simultan für alle in Teilsysteme

$$\begin{pmatrix} t_1^T \\ \vdots \\ t_m^T \end{pmatrix} \underbrace{(b_1, Ab_1, \dots, A^{k_1-1} b_1, \dots, b_m, Ab_m, A^{k_m-1} b_m)}_{Q_A \dots \text{ Auswahlmatrix}} = \begin{pmatrix} e_{v_1}^T \\ \vdots \\ e_{v_m}^T \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 \\ v_2 &= k_1 + k_2 \\ &\vdots \\ v_m &= k_1 + \cdots + k_m \end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t_1^T \\ \vdots \\ t_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{v_1}^T \\ \vdots \\ e_{v_m}^T \end{pmatrix} \cdot Q_A$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_s = \big(B, AB, A^2 B\big) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Auswahlmatrix zu Steuerbarkeitsindizes $k_1 = 2, k_2 = 1$:

$$Q_A = (b_1, Ab_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Aufstellen der Steuerbarkeitsmatrix Q_s

2. Bestimmung der Steuerbarkeitsindizes (Aufstellen Auswahlmatrix Q_A)

$$\begin{matrix} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{matrix}, \quad Q_A = (b_1, Ab_1, b_2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Bestimmung der blockweise ersten Zeilenvektoren $t_1^T, \dots, t_m^T$ der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 = 2 \\ v_2 &= k_1 + k_2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^T \\ t_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{v_1}^T \\ e_{v_2}^T \end{pmatrix} \cdot Q_A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot Q_A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Aufstellen der Transformationsmatrix

$$T = \left(\begin{array}{c} t_{1,1}^T \\ t_{1,2}^T \\ \hline t_{2,1}^T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} t_1^T \\ t_1^T \cdot A \\ \hline t_2^T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. Transformation des Systems

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -0.5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \bar{B} = TB = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 1.5 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)?$$

Problem tritt nur bei verschiedenen Steuerbarkeitsindizes auf.
Allgemeine Form

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 1 & & \\ \hline & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ \star & 0 & 1 \\ & 1 & \\ \hline & & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \star & \star & 0 \\ & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } v_1 = k_1 \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } v_2 = k_1 + k_2 \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } v_m \\ \\ \end{array}$$

Zusammenfassen der Zeilen $v_1, \dots, v_m$

$$\begin{pmatrix} t_1^T \cdot A^{k_1 - 1} \\ \vdots \\ t_m^T \cdot A^{k_m - 1} \end{pmatrix} \cdot B =: V \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

1. Korrektur durch Eingangstransformation

$$\tilde{B} := \bar{B} \cdot V^{-1} = TBV^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \vdots & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 1 & & \\ \hline & \ddots & 0 \\ \hline & & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & 0 \\ & & 1 \end{array}\right) = (e_{v_1}, \dots, e_{v_m})$$

2. Variante der Zustandsrückführung

$$
\begin{aligned}
u &= -V^{-1} \cdot \bar{K}\bar{x} \\
&= -\underbrace{V^{-1} \cdot \bar{K}T}_{k \in \mathbb{R}^{m\times n}} x
\end{aligned}
$$

Blockweiser Ansatz für Reglerverstärkung $\bar{K}$:

$$
\bar{K} = \left(\begin{array}{c|c|c}
k_{11}^T & & k_{1m}^T \\
\hline
\vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
\underbrace{k_{m,1}}_{k_1} & \cdots & \underbrace{k_{m,m}^T}_{k_m}
\end{array}\right) = \begin{pmatrix} k_1^T \\ \vdots \\ k_m^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}
$$

Geschloßener Kreis (Beispiel $m = 3$)

$$
\bar{A} = \tilde{B} \cdot \bar{K} = \left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \ldots a_{11}^T & \ldots & & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \\ \\ \ldots a_{12}^T \ldots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \\ \\ \ldots a_{1m}^T \ldots \end{matrix} \\
\hline
 & & \\
\hline
\begin{matrix} 0 \\ \\ \\ \ldots a_{m1}^T \ldots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \\ \\ \ldots a_{m2}^T \ldots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \ldots a_{mm}^T & \ldots & & \end{matrix}
\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 0 \\
k_{11}^T & k_{12}^T & k_{1m}^T \\
\hline
0 & 0 & 0 \\
k_{21}^T & k_{22}^T & k_{2m}^T \\
\hline
0 & 0 & 0 \\
k_{m1}^T & k_{m2}^T & k_{mm}^T
\end{array}\right)
$$

Vorgabe für geschloßenen Kreis

$$
\bar{A} - \tilde{B}\bar{K} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \ldots & p_1^T & \ldots & \ldots \end{matrix} & 0 & 0 \\
\hline
0 & \ddots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \ldots & p_m^T & \ldots & \ldots \end{matrix}
\end{array}\right)}_{=:P}
$$

mit $i-$ten Teilsystem

$$
\mathbb{R}^{k_i \times k_i} \ni \left(\begin{array}{c}
\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{matrix} \\
\hline
p_i^T
\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc}
 & 0 \quad 1 & \\
 & & 0 \quad 1 \\
\hline
-p_{i,0} & & -p_{i,k_i-1}
\end{array}\right)
$$

$$
p_i^T = (-p_{i,0} \cdots - p_{i,k_i-1})
$$

charakteristische Polynom

$$
\mathsf{CP}_i(s) = p_{i,0} + p_{i,1}s + \cdots + p_{i,k_i-1}s^{k_i-1} + s^{k_i}
$$

Entkopplung der Teilsysteme (=Nebendiagonal und Null): $a_{ij}^T - k_{ij}^T = 0^T$
Vorgabe der Wunschdynamik ($\equiv$ Haupdiaganolblöcke)

$$\begin{aligned} a_{ii}^T - k_{ii}^T &\overset{!}{=} p_i^T \\ \iff k_{ii}^T &= a_{ii}^T - p_i^T \end{aligned}$$

Darstellung in Originalkoordinaten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x \\ \dot{\bar{x}} &= T(A - BK)T^{-1} \cdot \bar{x} \\ &= (TA - \underbrace{\underbrace{TB}_{\bar{B}} V^{-1}}_{\tilde{B}} \bar{K})T^{-1}\bar{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff (TA - \tilde{B}\bar{K})T^{-1} &\overset{!}{=} p \\ \iff TA - \tilde{B}\bar{K} = pT & \end{aligned}$$

Zeile v_i

$$t_{i,k_i}^T \cdot A - \underbrace{k_i^T}_{i-\text{te Zeile } \bar{K}} = p_i^T \cdot T$$

$$\begin{aligned} k_i^T &= t_{i,k_i}^T \cdot A - p_i^T \cdot T \\ \Rightarrow \quad &= t_i^T \cdot A^{k_i} + \begin{pmatrix} p_{i,0} \cdot t_i^T \\ p_{i,1} \cdot t_i^T A \\ p_{i,k_{i-1}} \cdot t_i^T A^{k_i - 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= t_i^T (p_{i,0} \cdot I + p_{i,1} \cdot A + \cdots + p_{i,k_i-1} \cdot A^{k_i-1} + A^k) \\ &= t_i^T \cdot \mathsf{CP}_i(A) \end{aligned}$$

Gesammtverstärkung

$$K = V^{-1}\bar{K} = V^{-1} \begin{pmatrix} t_1^T \mathsf{CP}_1(A) \\ t_m^T \mathsf{CP}_m(A) \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung der Ackermannformel für Mehrgrößensystem

Beispiel Fortsetzung [3]

1. Teilsystem: Eigenwertvorgabe $-1, -2$

$$\begin{aligned} \mathsf{CP}_1(s) &= (s+1)(s+2) \\ &= s^2 + 3s + 2 \\ k_1^T &= t_1^T \cdot \mathsf{CP}_1(A) \\ &= (-1, 0.5, -0.5)(2I + 3A + A^2) \\ &= (-6, 6, 2.5) \end{aligned}$$

[3] Mitschrift am 05.11.2014

2. Teilsystem: Eigenwert $-3, \Rightarrow \mathsf{CP}_2(s) = (s+3)$

$$\begin{aligned} k_2^T &= t_2^T \cdot \mathsf{CP}_2(A) \\ &= (0,0,1)(3I+A) \\ &= (0,0,3). \\ \Rightarrow \bar{k} = \begin{pmatrix} k_1^T \\ k_2^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6, & 6, & 2.5 \\ 0, & 0, & 3 \end{pmatrix} \\ V &= \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gesammtverstärkung:

$$K = V^{-1} \cdot \bar{K} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4 Hautus - Kriterium und Stabilisierbarkeit

System:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad \begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n\times n} \\ B &\in \mathbb{R}^{n\times m} \end{aligned}$$

Satz (Hautus - Kriterium)

Das System (bzw. das Paar (A,B)) ist dann zustandssteuerbar, wenn $\forall s \in \mathbb{C}, \mathsf{rang}(sI - A, B) = n$.

Bemerkung:

1. Die Bedingung muss nur für Eigenwerte s, der Matrix A überprüft werden.
2. Gilbert-Kriterium (A,B) werden in der Jordan-Normalform $(\tilde{A},\tilde{B})$ betrachtet.

$$(sI - \tilde{A}, \tilde{B}) = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} s-s_1 & -1 & \multirow{2}{*}{0} & \multirow{2}{*}{0} & \cdots \\ & s-s_1 & & & \star\cdots\star \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & s-s_2 & 0 & \star\cdots\star \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & s-s_3 & \star\cdots\star \end{array}\right)$$

Rangabfall in der letzten 3 Zeilen für $sI - \tilde{A}$ für $s = s_i$

Der Abfall bei $sI - \tilde{A}$ für einen Eigenwert s_i, muss durch Einträge in $\tilde{B}$ ausgeglichen werden.

Forderung:

Ein System mit $k > 1$ Jordanblöcken des gleichen Eigenwertes kann m dann steuerbar sein, wenn es mindestens $m \geq k$ Eingänge besitzt.

Definition:

Das Paar (A,B) heißt stabilisierbar, falls $\forall s \in \mathbb{C}$ mit $\mathsf{Re}(s) \geq 0, \quad \mathsf{Rang}(sI - A, B) = n$.
Interpretation: Alle instabilen Eigenwerde und steuerbar.

Kalman-Zerlegung nach Steuerbarkeit:

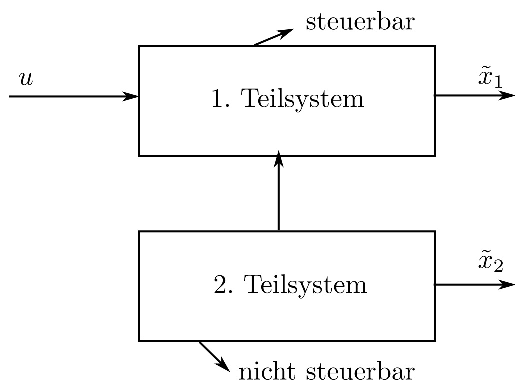
Sei $q \cdot \text{rang} Q_s < n$, Dann existiert eine Zustandstransformation

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = Tx, \qquad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ regulär}$$

die das System in ein steuerbares und ein nicht steuerbares Teilsystem zerlegt.

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} u$$

$$\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \qquad \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{q \times m}$$



- $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ ist steuerbar
- Eigenwerte

$$\begin{aligned} \texttt{eig}\ (A) &= \texttt{eig}\ (\tilde{A}) \\ &= \texttt{eig}\ (\tilde{A}_{11}) \cup \texttt{eig}\ (\tilde{A}_{22}) \end{aligned}$$

- Das System ist dann stabilisierbar, wenn die Matrix $\tilde{A}_{22}$ stabil ist (d.h. alle Eigenwerte haben negativen Realteil).
- Zerlegung des Zustandsraumes:

$$\mathbb{R}^n = \text{im} \underbrace{Q_s}_{\substack{\text{Unterraum der} \\ \text{steuerbaren Zustände}}} \oplus \underbrace{\ker Q_s^T}_{\substack{\text{Unterraum der} \\ \text{unsteuerbaren Zustände}}}$$

  Transformationsmatrix

$$T^{-1} = \left(||| \vdots ||| \right)$$

  - q Spaltenvektoren die imQ_s aufspannen.
  - $(n-q)$ Spalten (Komplement)

  Seien $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^m$ die Spalten von $u = (u_1, \dots, u_m)$ und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ die Spalten von $v = (v_1, \dots, v_n)$

  Dann : $M = uSv^T = \sum\limits_{i=1}^{r} \sigma_i \cdot \underbrace{u_i \cdot v_i^T}_{\text{dyad. Produkt}}$

- Spalten $u_1, \dots, u_r$ spannen Bild der Matrix M auf

- Spalten $u_{r+1}, \dots, u_m$ bilden Komplement ($u \dots$ orthogonal)

Transformationsmatrix: $Q_s \underset{\text{SVD}}{\rightarrow} u, S, v$

$$T^{-1} = u \iff T = u^{-1} \underset{\text{orthogonal}}{=} u^T$$

$$\tilde{x} = Tx = u^T x$$
$$\dot{\tilde{x}} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1} \cdot \tilde{x} + TBu$$
$$= \underbrace{u^T A u}_{\tilde{A}} \cdot \tilde{x} + \underbrace{u^T B}_{\tilde{B}} \cdot u$$

Beispiel:

Inverses Pendel auf Rädern

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ b_4 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

- ohne I-Anteil $(n = 4)$: steuerbar, rang$Q_s = 4$
- mit I-Anteil $(n = 5)$: nicht steuerbar, rang$Q_s = 4 < 5$ Begründung (Gilbert): doppleter Eigenwert bei 0.
  - 2×2 Block $\substack{\dot{x}_1=3 \\ \dot{x}_3=a}$
  - 1×1 Block I-Anteil des Reglers

  Für $s = s_0$: Rangabfall 2 (in Hautus-Matrix), aber nur $m = 1$ Eingang.
  $\tilde{A}_{22} = 0 \Rightarrow$ nicht stabilisierbar.

Reglerentwurf für stabilisierbare Systeme:

1. Kalman-Zerlegung nach Steuerbarkeit
$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$
2. Zustandsrückführung für steuerbares Teilsystem
   $\Rightarrow$ liefert Verstärkung $\tilde{K}_1$

$$\texttt{Matlab/Octave:} \tilde{K}_1 = \texttt{place}(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, [\dots])$$
$$\texttt{Scilab:} \tilde{K}_1 = \texttt{ppol}(\dots)$$
$$\Rightarrow \tilde{K} = (\tilde{K}_1 \underset{\substack{\text{keine Rückführung für} \\ \text{unsteuerbarer Teilsystem}}}{0})$$

3. Zustandsrückführung in Originalkoordinaten
$$\tilde{x} = Tx = u^T x \qquad \text{bzw. } x = u\tilde{x}$$
$$u = -Kx = -\underbrace{Ku}\,\tilde{x} \Rightarrow \tilde{K} = K \cdot u$$
$$K = \tilde{K}u^{-1} = \tilde{K}u^T$$

$$\texttt{Scilab:} \qquad K = -\texttt{stabil}(A, B, [\underset{\substack{\text{Eigenwerte für} \\ \text{steuerbares Teilsystem}}}{\dots}])$$

1.4.1 Nullstellen und Smith-Normalform

Zustandsraummodell [4]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Hautus-Kriterium:

Das System bzw. Paar (A, B) ist steuerbar, wenn

$$\forall s \in \mathbb{C}: \qquad \text{rang } (sI - A, B) = n$$

Das System bzw. das Paar (A, C) heißt beobachtbar, wenn

$$\forall s \in \mathbb{C}: \qquad \text{rang} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

Definition:

Eine Zahl $s_0 \in \mathbb{C}$ heißt

1. Eingangs-Entkopplungsnullstelle (input-decoupling zero), falls

$$\text{rang } (s_0 I - A, B) < n$$

2. Ausgangs-Entkopplungsstelle (output-decoupling zero), falls

$$\text{rang } \begin{pmatrix} s_0 I - A \\ C \end{pmatrix} < n$$

3. Eingangs-Ausgangs Entkopplungsnullstelle (input-output-decoupling zero), wenn sie sowohl Eingangs als auch Ausgangsentkopplungsnullstelle ist.

- Eingangs-Entkopplungsnullstelle = nicht steuerbare Eigenwerte/Modi
- Ausgangs-Entkopplungsnullstelle = nicht beobachtbare Eigenwerte/Modi
- Eingangs-Ausgangs-Entkopplungsnullstelle = Eigenwerte, die weder steuerbar noch beobachtbar sind.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Eingangs-Entkopplungsnullstelle $s = -2$ $\quad \Rightarrow$ stabilisierbar
2. Ausgangs-Entkopplungsnullstelle $s = -1$ $\quad \Rightarrow$ detektierbar
3. keine

[4] Mitschrift am 12.11.2014

$\Rightarrow$ Gilbert-Kriterium
Lösung:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B \cdot u(\tau)d\tau$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix} x(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau} \\ 0 \\ e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} u(\tau)d\tau$$

$\Rightarrow$ nur steuerbare Eigenwerte erscheinen in $e^{At}B$.
Ausgang:

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{At} + \int_0^t C \cdot e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$= (e^t, e^{-2t}, 0) \cdot x(0) + \int e^{t-\tau}d\tau$$

$\Rightarrow$ nur beobachtbare Eigenwerte erscheinen in Ce^{At}
$\Rightarrow$ nur steuerbare und beobachtbare Eigenwerte erscheinen in $Ce^{At}B$

Modifizierte Hautus-Bedingung:

Das System bzw. das Paar (A, B) ist stabilisierbar, wenn

$$\forall s \in \mathbb{C} \qquad \text{mit } \mathrm{Re}(s) \geq 0 : \quad \text{rang } (sI - A, B) = n$$

Das System bzw. das Paar (A, C) heißt detektierbar, wenn

$$\forall s \in \mathbb{C} \qquad \text{mit } \mathrm{Re}(s) \geq 0 : \quad \text{rang } \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

Normalrang einer Polynommatrix M:

$$\max_{s \in \mathbb{C}} \text{rang} M(s)$$

System mit in Ein.-und Ausgängen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$
$$y = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Rosenbrock-Matrix

$$P(s) = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(n+m)\times(n+m)}$$

Die Rosenbrock-Matrix habe den Normalrang $n+m$. Eine Zahl $s_0 \in \mathbb{C}$ heißt dann invariante Nullstelle

$$\text{rang } \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} < n + m$$

Berechnung: det $P(s) \overset{!}{=} 0$.

- Beziehung zu Entkopplungs-Nullstellen
  Aus

$$\text{rang } (sI - A, B) < n \quad \text{folgt} \quad \text{rang } \begin{pmatrix} s_0 I - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} < n + m$$

  als

$$\text{rang } \begin{pmatrix} s_I - A \\ C \end{pmatrix} < n \quad \text{folgt} \quad \text{rang } \begin{pmatrix} s_0 I - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} < n + m$$

  $\Rightarrow$ Entkopplungsnullstellen sind auch invariante Nullstellen

- Beziehung zu Übertragungsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

  Schur-Formel:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right) = \det (A) \cdot \det (D - C \cdot A^{-1}B) \text{ für } A \text{ regulär}$$

$$\begin{aligned} \det P(s) = \det \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} &= \det (sI - A) \cdot \det (0 - C(sI - A)^{-1}(-B)) \\ &= \det (sI - A) \cdot \det \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B)}_{G(s)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen der Übertragungsfunktion sind auch invariante Nullstellen.

Invarianzeigenschaften der inverianten Nullstellen

1. reguläre Transformation des Eingangsvektors

$$\begin{aligned} \omega(t) &= V^{-1}u(t) \\ u(t) &= V\omega(t) \end{aligned} \Rightarrow (A, B) \rightarrow (A, BV)$$

2. reguläre Transformation des Zustandsvektors

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= Tx \\ x &= T^{-1}\tilde{x} \end{aligned} \Rightarrow (A, B, C) \rightarrow (\underset{\substack{\text{Ähnlichkeits} \\ \text{-transformation}}}{TAT^{-1}}, TB, CT^{-1})$$

3. Zustandsrückführung

$$u = -Kx + w \rightarrow (A, B) \rightarrow (A - BK, B)$$

   Beweis in 3.: Rosenbrock-Matrix des geschloßenen Kreises

$$P(s) = \begin{pmatrix} sI - (A - BK) & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -K & I_m \end{pmatrix}}_{\det \equiv 1}$$

Invariante Nullstellen werden durch unimodulare Transformation, die auf die Rosenbrock-Matrix angewendet werden, nicht verändert.

Definition:

Eine quadratische Polynommatrix

$$U(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$$

heißt **unimodular**, falls $\det(U) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
(Determinante ist nicht Null und hängt nicht von s ab).

Folgerung:

Sei U unimodular, dann existiert Inverse U^{-1} und die Inverse ist wieder eine Polynommatrix

$$U^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det U}_{\text{reelle Zahl}\neq 0}} \cdot \underbrace{\operatorname{adj}(U)}_{Polynommatrix}$$

Satz:

Sei $M \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ mit Normalrang r. Dann existieren unimodulare Matrizen U, V derart, dass

$$U(s)M(s)V(s) = \wedge(s)$$

mit Diagonalmatrix

Smith-Normalform:

$$\wedge = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1(x) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_r(s) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

mit monischen (monic) Polynome $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}[s]$ wobei $\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_r$.
monisch ... höchster Koeffizient ist 1.

- Anwendung auf Rosenbrock-Matrix [5]

$$P(s) = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det\left(U(s)\cdot P(s)\cdot V(s)\right) &= \underbrace{\det U(s)}_{\text{konst}} \cdot \det P(s) \cdot \underbrace{\det P(s)}_{konst} \\ &= \det \wedge = \lambda_1(s)\dots\lambda_r(s) =: \rho(s) \text{ für Normalrang } r = n+m\end{aligned}$$

Folgerung:

Die invariante Nullstellen sind die Nullstellen von $\rho(s)$
$\Rightarrow$erlaubt allgemeine Definition der invarianten Nullstellen. (auch für rechteckige bzw. singuläre Rosenbrock-Matrizen).
Anwendung auf die Hautus-Matrizen liefert Eingangs.-bzw. Ausgangs-Entkopplungsnullstellen.

- (A, B) ist genau dann steuerbar, wenn die Hautus-Matrix $(sI_n - A, B)$ die Smith-Normalform $(I_n, 0)$ besitzt.
- (A, C) ist genau dann beobachtbar, wenn $\binom{sI_n - A}{C}$ die Smith-Normalform $\binom{I_n}{0}$ besitzt.

[5] Mitschrift am 26.11.2014

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rang $Q_s = 2 < 3$

- nicht steuerbar
- existiert

Eingangsentkopplungsnullstelle $n -$ rang $Q_s = 1$

Kalman-Zerlegung

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad V^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -2$ist Eingangsentkopplungsnullstelle.
Smith-Normalform von

$$(sI - A, B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} s & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & s+2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & s+1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

ist.
Berechnung mit Matlab $A = [\dots]$;
$B = [\dots]$;
$s = \texttt{syms('s')}$
$M = [s \star \texttt{eye}(\texttt{size}(A)) - A, B]$;
$S = \texttt{maple('smith', M, S);}$

2 Beschreibung linearer Systeme durch Polynommatrizen

2.1 Polynomiale Systemdarstellung

Systemgleichung: $A\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot x(t) + B(\frac{d}{dt}) \cdot u(t) = 0$ mit Differentialoperatoren.

$$A\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{i=0}^{g} A_i \frac{d^i}{dt^i}$$

$$B\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{j=0}^{h} B_j \frac{d^j}{dt^j} \qquad \text{Konstante Matrizen.}$$

$u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad u \ldots$ Steuersignale
$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad x \ldots$ Systemsignale