TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik INSTITUT FÜR REGELUNGS- UND STEUERUNGSTHEORIE

NICHTLINEARE REGELUNGSTECHNIK 1
Dr.-Ing. J. Winkler

Mitschrift von Bolor Khuu

15. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe und Eigenschaften nichtlinearer Systeme

1.1 Nichtlineare Übertragungsglieder

Anordnung, die aus einem Eingangssignal $u(t)$ ein Ausgangssignal $y(t)$ erzeugt.
$y(t)$ mit Operator φ. $\quad y(t) = \varphi(t)$

- **Beispiel:**
  $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \qquad \varphi \rightarrow$ Ausführungs der Integration

  $\varphi(u + u^*) = \varphi(u) + \varphi(u^*).$
  $\varphi(c \cdot u) = c \cdot \varphi(u).$
  $\varphi(c \cdot u + c^* \cdot u^*) = c \cdot \varphi(u) + c^* \cdot \varphi(u^*).$

- **Beispiel 1:**

$$\begin{aligned} y &= \varphi(\underline{u}) & \underline{u} &\in \mathbb{R}^2 \\ &= u_1 \cdot u_2 & y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  $\varphi(\underline{u} + \underline{u}^*) = \varphi\binom{u_1+u_1^*}{u_2+u_2^*} \qquad \underline{u} = \binom{u_1}{u_2} \qquad = (u_1 + u_1^*) \cdot (u_2 + u_2^*) =$
  $\underbrace{u_1 \cdot u_2}_{\varphi(u)} + \underbrace{u_1^* \cdot u_2^*}_{\varphi(u^*)} + u_1 \cdot u_2^* + u_1^* u_2 \rightarrow$ nicht linear

- **Beispiel 2:**
  $y = m \cdot u + b =: f(u). \quad u, y, m, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(u + u^*) &= m(u + u^*) + b. \\ &= mu + b + mu^* \\ &= \varphi(u) + \underbrace{mu^*}_{\text{nicht linear}\rightarrow\text{affin in } u} \end{aligned}$$

- **Errinerung:** Ein Übertragungsglied heißt zeitinvariant wenn für dieses das Verschiebungsprinzip gilt.

$y(t) = \varphi(u(t))$ $\quad u \quad$ -in t_0 nach rechts schieben
$\quad u(t-t_0)$
$\rightarrow \varphi(\,u(t-t_0)) = y(t-t_0) \rightarrow y$ auch um t_0 nach verschob.

- **Folgerung:** Da das Überlagerungsprinzip bei nicht linearen Systemen nicht gilt , läßt nicht der Zusammenhang zwischen den Ein und Ausgangsgrößen nicht durch ein Faltungsintegral darstellen.

- **Folge:**
  - keine komplexen Übertragungsfunktionen
  - kein Freqünzgang
  - kein Laplace-Transformation.

  $\rightarrow$ Hilfsmittel der komplexen Funktionentheorie nicht anwendbar!!
  $\rightarrow$ keine allgemein gültige Theorie$\rightarrow$ Behandlung bestimmbar Systemklassen.
  $\rightarrow$ Systemtheoretische Eigenschaften, die für einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ entwickelt wurden, gelten nicht notwendigerweise für den vollständigen $\mathbb{R}^n$ lokale und globale Eigenschaften fallen nicht zusammen.

1.2 Typische Phänomene in nichtlinearen Systeme

Linearer Fall (Errinerung)

lineares System

$$\dot{x} = A \cdot x, \quad x(0) = x_0 \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{1.3}$$

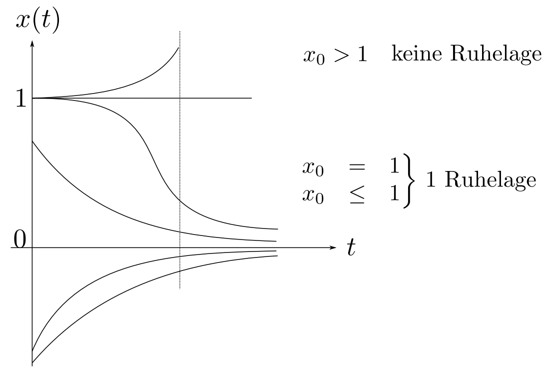
Ruhelagen: Lösung von $A \cdot x = 0$.

- wenn A regulär $(\det A \neq 0)$ dann gibt es genau eine Ruhelage x_e mit $A \cdot x_e = 0$ und $x(t_0) = x_e \rightarrow x(t) = x_e \quad \forall\, t > t_0$
- wenn A singulär $(\det A = 0)$ dann gibt es unendlich viele Ruhelagen.
- Die Lösung des Anfangswertproblems (1.3) lautet mit der
  Transitionsmatrix $\varphi(t) = e^{A \cdot t} = \underline{T} + A \cdot t + \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot t^2$ wie folgt $x(t) = \phi(t) \cdot x_0$
  Damit gilt:
  $a_1 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \leq \| \, x(t) \, \| \leq a_2 \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}$ $\qquad$ mit $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$.
- Die Ruhelage x_e ist asymptotisch stabil. Wenn alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil haben und unabhängig von den Angangsbedinungen.
- wenn
  $$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad x(0) = x_0 \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, u \in \mathbb{R}^m \tag{1.4}$$
  Asymptotisch Stabilität von $\dot{x} = A \cdot x$ impliziert BIBO -Stabilität von (1.4)
- sinusformiges Eingangssignal $\rightarrow$ sinusförmiges Ausgangssignal

Nichtlinearer Fall

(A) **Mehrfache Ruhelage (Gleichgewichtspunkte)**.
Nichtlinearer System , keine , eine, mehrere , unendliche viele Ruhelagen die auch abhängig von den Anfangsbedingung sein können.
Ruhelagen: x_e : $\quad x(0) = x_e \to x(t) = x_e \ \forall \ t > 0.$

- **Beispiel:** $\dot{x} = -x + x^2 \quad x(0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}$
Lösung: $x(t) = \frac{x_0 \cdot e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 \cdot e^{-t}}$



(B) **Endliche Fluchtzeit**
Die Trajektorie eines nichtlinearen Systems kann in endlicher Zeit gegen ∞ oder in die Ruhelage laufen.

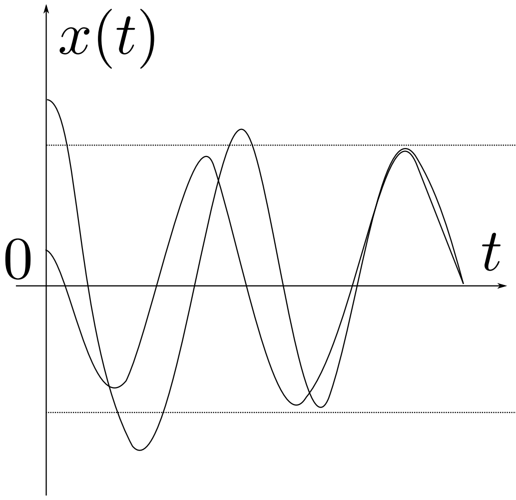
- **Beispiel:** siehe **A.** mit $x_0 > 1$
$\dot{x} = -\sqrt{x} \quad x_0 > 0.$

$$x(t) = \begin{cases} (\sqrt{x_0} - \frac{t}{2})^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \cdot \sqrt{x_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ruhelage: $x_e = 0$ in endlicher Zeit wird die Ruhelage aus jedem beliebig möglichichen Anfangszustand erreicht.

(C) **Grenzzyklen**
Anfangswert unabhängige Dauerschwingungen konstante Amplitude und $T-$Periodendauer ohne äußere Anregung.

- **Beispiel:**
van der Pol-Gleichung
$m\ddot{x} + 2c \cdot (x^2 - 1) \cdot \dot{x} + kx = 0, \quad m, c, k > 0.$
(Feder Masse System mit posivit abhängige Dämpung $2c \cdot (x^2 - 1)$)
$\to x \gg 1$ Positive Dämpung, Energieverlust konvergierendes Verhalten.
$\to x \ll 1$ Negative Dämpung, divirgierendes Verhalten.
weder unbegrenztes Wachstum , nach Konvergenz gegen 0.



1.3 Lipschitz-Bedingung und Stetigkeit

- **Satz:** Sind die Funktionen $f(x,t)$ aus (1.7) und $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ auf der Menge $B \times [t_0, t_0+\delta]$ mit $B \in \mathbb{R}^n$ stetig dann erfüllt $f(x,t)$ lokal Lipschitz-Bedingung (1.8)
  - $f(x,t)$ nicht stetig differenzierbar $\rightarrow$ $f(x,t)$ kann durchaus Lipschitz-Stetig sein.
- **Satz:** Globale Exitenz und Eindeutigkeit
  - Ausgangspunkt:
    $f(x,t)$ aus (1.7) ist stückweise stetig int t, global Lipschitz $\forall\, t \in [t_0, t_0+\tau] \Rightarrow$ (1.7) hat eine Lösung im Zeitintervall $[t_0, t_0+\delta]$
    Sind $f(x,t)$ und $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ auf $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_0+\tau]$ stetig, dann ist $f(x,t)$ global Lipschitz, wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ auf $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_0+\tau]$ gleichmässig beschränkt ist.
  - Gleichmässig beschränkt:
    $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ ist gleichmässig beschränkt, wenn gilt. Zu jeder positiv finiten Konstante a existiert ein $\beta(a)$ mit unabhängig von t_0!
    $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), t_0)\right\| \leq a \Rightarrow \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t)\right\| \leq \beta(a) \quad \forall\, t \in [t_0, t_0+\tau], x \in \mathbb{R}^n$
  - **Beispiel:**
    $\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& -x_1 + x_1\, x_2 \\ \dot{x}_2 &=& x_2 + x_1\, x_2 \end{array}\right\} f(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1+x_2 & x_1 \\ -2+x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}$ $f(x)$ ist nicht stetig differenzierbar, $\Rightarrow$ ***lokal Lipschitz***
    gleichmässig beschränkt?
    $\left\|\begin{pmatrix} -1+x_2 & x_1 \\ -2+x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|-1+x_2|\,,\, |x_2| + |1-x_1|\}$
    $\Rightarrow$ nicht gleichmässig beschränkt, nicht global Lipschitz.
  - **Beispiel:**
    $\left.\begin{array}{rcl} \dot{x_1} &=& -x_1 + x_1 \cdot x_2 \\ \dot{x_2} &=& x_2 - x_1 \cdot x_2 \end{array}\right\} f(x)$

    $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1+x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{rcl} f(x) & \rightarrow & \text{stetig differenzierbar} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \rightarrow & \text{nicht global Lipschitz} \end{array}\right\} f$ ist lokal Lipschitz

    $$\left\| \begin{pmatrix} -1+x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\{ |-1+x_2| + |x_1|, |x_2| + |1-x_1| \right\}$$

2 Analyse nichtlinearer Systeme 2. Ordnung in der Phasenebene bzw, Nähe ihrer Ruhelagen, Phasenportraits

2.1 Einführung-Motivation

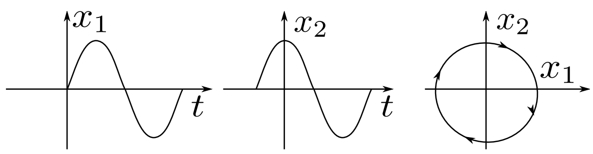
System der Form

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad x_1(0) = x_{10} \tag{2.1a}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad x_2(0) = x_{20} \tag{2.1b}$$

mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Phasenebene $x_1 - x_2-$Ebene
Lösung von (2.1) liefert $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ anschaulich darstellbar in der Ebene! Rechte Seite von (2.1) Tangentenvektor an der jeweiligen Lösungskurve. Jedem Punkt ist eindeutig ein Vektor $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$zugeordnet.
Ziel: Konstruktion von Phasenportraits

- Menge von Anfangswerten in der $x_1 - x_2$-Ebene
- Trajektorien berechnen $\hat{=}$ Lösung von 2.1
- Familie von Trajektorien = Phasenprotrait, Zeitinformation geht verloren



2.2 Qualitatives Verhalten linearer System

linearisiertes System (2.1) um die Ruhelage x_{1e}, x_{2e}

$$\dot{\tilde{x}} = A\,\tilde{x} \text{ mit } A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_{x_{1e}, x_{2e}}}_{\textbf{Jakobi-Matrix}} \qquad \tilde{x} = \binom{x_1 - x_{1e}}{x_2 - x_{2e}}$$

A läßt sich in Jordan Normalform transfonieren.(RT2)
$z = T \cdot x \qquad \rightarrow \dot{z} = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot z = J \cdot z$
A habe die Eigenwerte λ_1, λ_2. Dann gibt's 4 Fälle

- **A)**. $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 2 Verschiedene reelle Eigenwerte
- **B)**. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 1 Doppelter Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$
- **C)**. $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 1 konjugiert komplexe Eigenwertpaar $\lambda = a \pm jb$
- **D)**. Spezialfall: mindestens 1 Eigenwert ist 0 Fall A). Beide Eigenwerte reell, A ist diagonalähnlich $\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{pmatrix}$

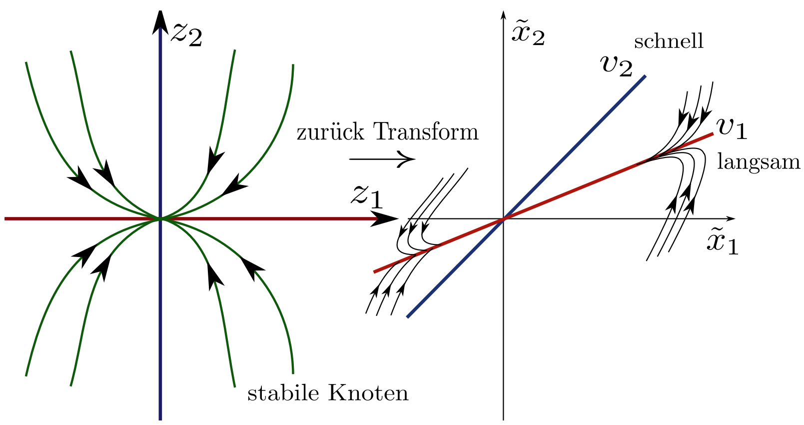
$$\boxed{\begin{cases} \dot{z}_1(t) & = & \lambda_1 z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) & = & \lambda_2 z_2(t) \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{z}_1(t) & = & z_{10}\, e^{\lambda_1 t} \\ \dot{z}_2(t) & = & z_{20}\, e^{\lambda_2 t} \end{cases}} \tag{2.2}$$

Eliminieren von t : $\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{z_1}{z_{10}} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{z_2}{z_{20}}$

$$\boxed{z_2 = \frac{z_{20}}{z_{10}^{(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})}} z_1^{(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})}} \tag{2.3}$$

$$\boxed{\text{Steigung:} \qquad \frac{dz_2}{dz_1} = \frac{z_{20}}{z_{10}^{\lambda_2/\lambda_1}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}} \tag{2.4}$$

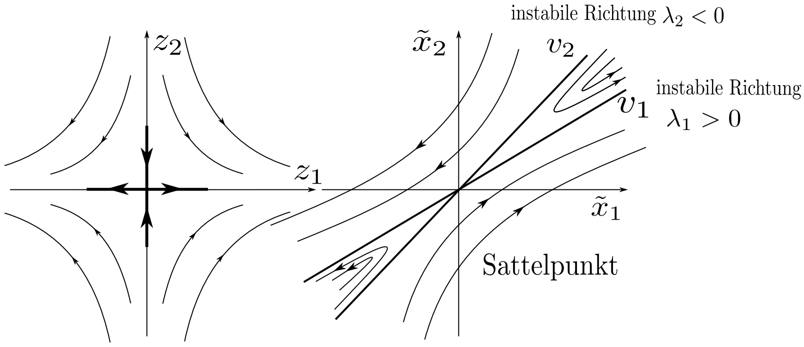
- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \qquad (\lambda_2 =$ schnell , $\lambda_1 =$ langsam)
  $|z_1| \rightarrow 0 \qquad \left|\frac{dz_1}{dz_2}\right| \rightarrow 0$
  $|z_1| \rightarrow \infty \qquad \left|\frac{dz_1}{dz_2}\right| \rightarrow \infty$



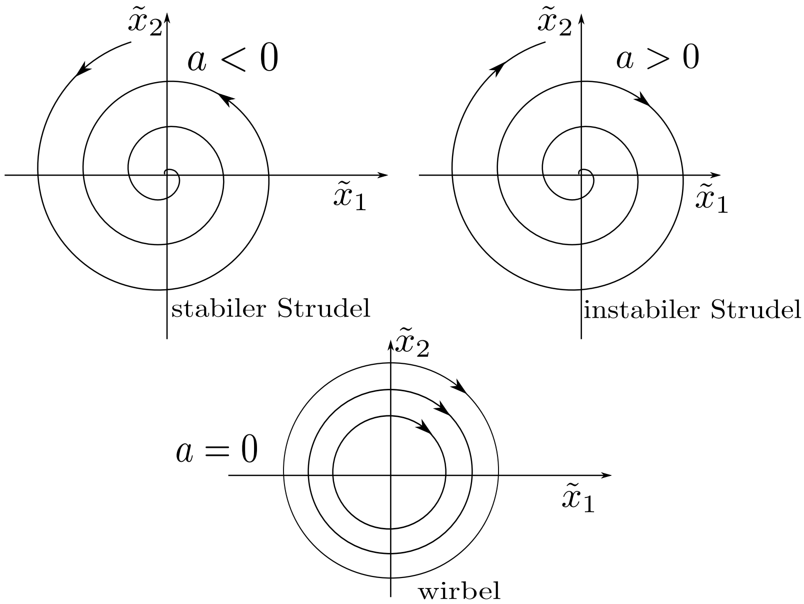
v_i die durch den zum Eigenwert λ_i gehörigen Eigenvektor definierte Richtung

- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ instabile Knoten
  wie stabile Knoten,nur Pfeile andersum

- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \quad \left.\begin{array}{rcl} z_1(t) &=& z_{10}\cdot e^{\lambda_1 t} \to \infty \\ z_2(t) &=& z_{20}\cdot e^{\lambda_2 t} \to 0 \end{array}\right\}$ für $t \to \infty$



- konjugiert komplexer Fall $\lambda = a \pm jb$



2.3 Qualatatives Verhalten nichtlinearer Systeme in der Nähe ihrer Ruhelage

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad x_1(0) = x_{10} \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad x_2(0) = x_{20} \tag{2.6}$$

Taylor-Reihen-Entwicklung um Ruhelage (x_{1e}, x_{2e})

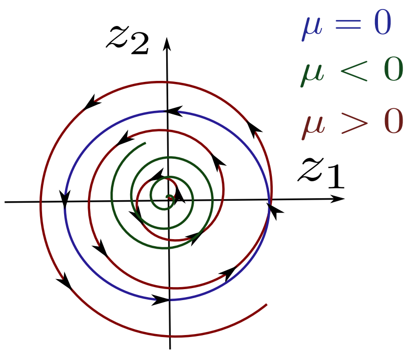
$$\dot{x}_i = \underbrace{f_i(x_{1e}, x_{2e})}_{=0} + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_{(x_{1e},x_{2e})}(x_1 - x_{1e}) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_{(x_{1e},x_{2e})}(x_2 - x_{2e}) + \text{ T.h.O}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}\right|_{(x_{1e},x_{2e})} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x}_i = x_i - x_{ie} \tag{2.7}$$

- ***Satz von Hartmann-Grobmann***
  Wenn die 2.6 gehörige Jakobi-Matrix keine Eigenwerte mit verschwindenden Realteil hat, so existiert ein Homöomorphismus in der Umgebung U um die Ruhelage zwischen den Trajektorien des nichtlinearen Systems $\dot{x} = A \cdot \tilde{x} \qquad h : U \to \mathbb{R}^2$
  Ruhelagen, deren Jacobi-Matrix Eigenwerte mit nicht verschwindend Realteil haben heißen hy-

perbolisch. Jordan-Form im Falle eines Wirbels (nicht hyperbolische RL).

$J = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \mu = 0 \rightarrow \text{Wirbel} \\ \mu < 0 \rightarrow \text{stabiler Strudel} \end{cases}$



- Beispiel:

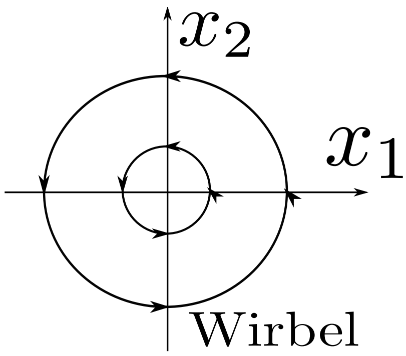
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ruhelagen $x_{1e} = 0, x_{1e} = 0$

Jakobi-Matrix $= \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\mu(3x_1^2 - x_2^2) & -(1 + 2\mu x_1 x_2) \\ 1 - 2\mu x_1 x_2 & -\mu(x_1^2 + 3x_2^2) \end{pmatrix}$

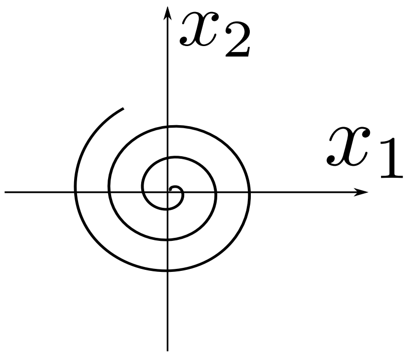
Auswertung in Ursprung (Ruhelage).

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Eigenwert: $\det \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} = s^2 + 1 = 0 \quad s_{1,2} = \pm j$



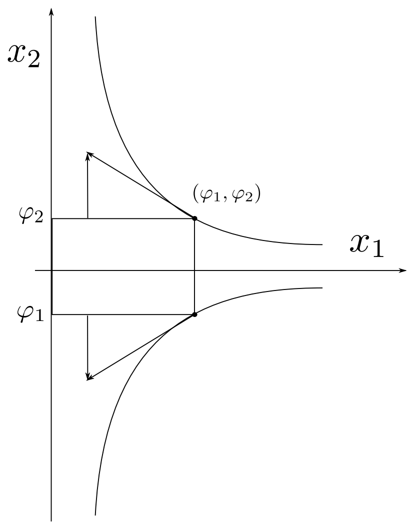
- Beispiel Nichtlineares System: $\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned}$ (2.8) in (r,φ) : $\begin{aligned} \dot{r} &= -\mu r^3 \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned} \Bigg| \begin{aligned} &\dot{\mu} > 0 \qquad r \rightarrow 0 \\ &\dot{\mu} < 0 \qquad r \rightarrow \infty \end{aligned}$

$t \rightarrow \infty$



2.4 Konstruktion des gesamten Phasenportraits

- **A** Ruhelagen bestimmen
- **B** Linearisierung von (2.1) um Ruhelagen, Bestimmung des Typs der Ruhelagen
- **C** Untersuchung auf Symmetrien Symmetrie zur x_1-Achse



$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$
$\dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$

$f_2(\varphi_1, \varphi_2) = f_2(\varphi_1, \varphi_2)$
$f_1(\varphi_1, \varphi_2) = f_2(\varphi_1, \varphi_2)$

Es muss gelten
$\varphi_1 = \varphi_1$
$\varphi_2 = -\varphi_2$

$f_1(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) = f_1(\varphi_1, -\varphi_2) = f_1(\varphi_1, \varphi_2)$
$f_2(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) = f_2(\varphi_1, -\varphi_2) = -f_2(\varphi_1, \varphi_2)$

- **D** Bestimmung von bestimmten Isoklinen (Punkte gleicher Steigung $\frac{dx_2}{dx_1}$)
  z.B: $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = 0$ (Fluß parallel x_1-Achse) $\frac{dx_2}{dx_1} = 0$
- **E** Prüfen,ob es Trajektorien gibt, die ausgewiesenen Mengen genügen, z.B. Trajektorien, für die gilt: $h(x_1, x_2) = 0$ mit ausgewiesen Fkt. $h : x_2 = \tanh(x_1)$ Prüfung, Wenn es Trajektorien gibt die $h(x_1, x_2)$ genügen, so muß die Richtungsableitung von h entlang f immer 0 sein!.
  - Also: $\frac{\partial h}{\partial x} \cdot f(x) = 0, \qquad x = (x_1, x_2)^T$
  - Bsp:
    $\dot{x_1} = 2x_2^2 - 2x_2 \qquad h(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 + 1 = 0$
    $\dot{x_2} = x_1$, $x_1 = x_2^2 - 1$
    $\frac{\partial h}{\partial h} f(x) = (1 \quad -2x_2)\binom{2x_2^3 - 2x_2}{x_1} = 2x_2^3 - 2x_2 - 2x_1x_2 = 2x_2^3 - 2x_2 - 2x_2^3 + 2x_2 = 0$

2.5 Existenz von Dauerschwingung, bzw. Grenzzyklen

[Bilder]

- Grenzzyklus: -Isolierte geschlossene Kurve
  3 Typen:
  1. stabile Grenzzyklus
  2. instabile
  3. $\left.\begin{array}{l}\text{innenstabile}\\ \text{aussen instabile}\\ \text{semistabile}\end{array}\right\}$ aber auch umgekehrt.

  $\int f_2\, dx_1 - f_2\, dx_2 = \iint (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2})\, dx_1\, dx_2 = 0$ kein Vorzeichenwechsel

- Beispiel:
  $\dot{x}_1 = g(x_2) + 4x_1x_2^2$
  $\dot{x}_2 = h(x_1) + 4x_1^2x_2$

  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4x_2^2 + 4x_1^2 > 0 \quad \forall\,(x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow$ kein Grenzzyklus

- **Satz:** Index-Theorem
  Sei N die Anzahl von Knoten, wirbeln und Strudeln, die von einem Grenzzyklus (GZ) umschloßen werden und S die Anzahl der Sattelpunkte dann gilt wenn ein GZ existiert, dann $N = S + 1$

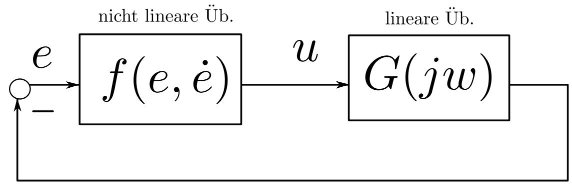
- **Satz:** Poincare-Bendixson
  Wenn die Trajektorie T eines Systems vom Typ(2.1) in einer endl. Umgebung Ω verbleibt, dann ist folgendes wahr:
  - a T geht gegen eine Ruhelage
  - b T geht gegen einen asymptot. stabilen GZ
  - c T ist ein Grenzzyklus

- **Satz:** Bendixson
  Für ein System vom Typ(2.1) existiert kein GZ in einer Umgebung Ω, wenn in dieser Umgebung $\frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_1}{dx_2}$ nicht verschwinden und Vorzeichen nicht ändern.
  - Beweis: $\dot{x_1} = f_1(x_1, x_2) \quad \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2)$
    $f_2(x_1, x_2)dx_1 - f_1(x_1, x_2)dx_2 = 0$ Sei L geschl. Kurve eines GZ.
    $\int_f (f_2dx_1 - f_1dx_2) = 0$ Stokescher Integralsatz.
    $\int_\alpha (f_2dx_2 - f_2dx_2) = 0 \int\int (\frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2}) = 0$ damit kein GZ , auf Ausdruck nicht 0 sein, wenn nicht =0 , dann keine VZ wechsel, damit kein GZ

3 Methode der harmonische Balance

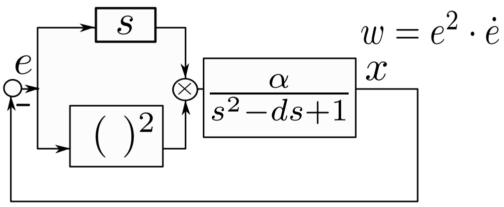
(auch. Methode der Beschreibungs-Funktionen)

- Idee: Frequenzbereichsmethoden aus linearer Theorie zur (näherungsweisen) Beschreibung bestimmter nichtlinearer Systeme verwenden.
- Ziel: Vorhersage von Dauerschwingungen (DS) , Amplitude, Periodendauer
- Konzept: Fourierreihenentwicklung periodischer Zeitvorgänge ein System jelignente Vernachläßigungen führen zur. sog. Beschreibungsfunktion, die einfache Analyse ermöglicht.
- Bezug: Nichtlinearer Standartregelkreis



dann geeignete Ausdruck ersetzen, so daß Beschreibung im Freqünzbereich möglich

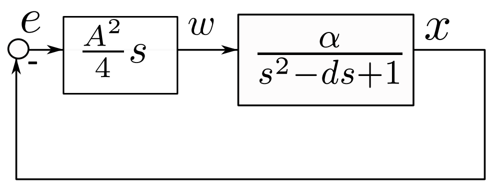
3.1 Einführungsbeispiel



Annahme Dauerschwingungen vorhanden$\rightarrow$
$e(t) = A \cdot \sin(wt)$
$\dot{e}(t) = A \cdot w \cdot \cos(wt)$
$w(t) = A^3 w \sin^2(wt)\cos(wt) = A^3 w(1-\cos^2(wt))\cos(wt) = \frac{A^3 w}{4}(\underbrace{\cos(wt)}_{\text{Grundschwingung}} - \underbrace{\cos(3wt)}_{\text{Oberschwingung}})$
Tiefpaßcharakter des lin. Übertragungsglied unterdrückt die Oberschwingung
mithin:

$$w \approx \frac{A^3}{4} w \cos(wt) = \frac{A^2}{4}\frac{d}{dt}(A\sin(wt)) = \frac{A^2}{4}\frac{d}{dt}e(t)$$

Bildbereich : $\frac{W(s)}{E(s)} = \frac{A^2}{4}s$ Übertragungsverhalten des neün Blocks, somit



$$w = (\underbrace{\frac{A^2}{4}jw}_{N(A,w)})(-x), \quad e(t) = A\sin(wt)$$

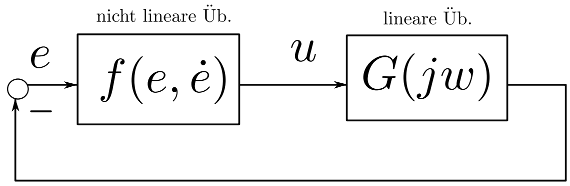
$\Leftrightarrow e = -G(-jw)w = -G(jw)N(A,w)\,e \Rightarrow \Big(1 + G(jw)N(A,w)\Big)e = 0$
$\Leftrightarrow 1 + G(jw)N(A,w) = 0 \to 1 + (\frac{A^2}{4}jw)(\frac{\alpha}{(jw)^2-\alpha jw+1}) = 0$
Dauerschwingung mit Amplitude $A = 2$ und $w = 1$

3.2 Grundlagen der Methoden

Annahme: es existiert eine Dauerschwingung im nichtlinearen Standartregelkreis.

Vorraußetzung

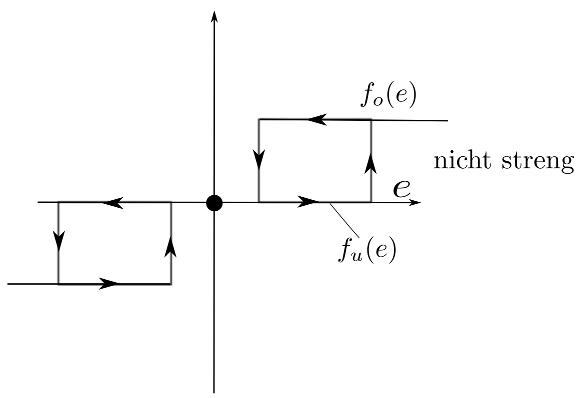
1. Lineares System



- **L1** $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}e^{-T_t s} \quad T_t > 0, \quad G(0) > 0, \quad N(s), Z(s) \in \mathbb{R}[s]$
- **L2** Pole von $Z(s)/N(s)$ liegen links der $j-$Achse, 1 einfacher Pol in $s = 0$ erlaubt
- **L3** $G(jw)$ hat genügend Tiefpaßcharakter grad$Z \leq$ grad$N - 2$

2. Nichtlineares System

- **N1** $f(-e, -\dot{e}) = -f(e, \dot{e})$
  $\to$ eindeutige Kennline $\Rightarrow$ ungerade Fkt.
  $\to$ Hysterese $\Rightarrow$ Spiegelung am Ursprung
- **N2** $f(e)$ bzw. $f_u(e), f_o(e)$ sind *monoton steigend*!



3. Die Freqünz der Dauerschwingung liegt
   - **Z1** im Bereich der Knickfreqünzen des linearen Teilsystems

Beschreibungsfunktion

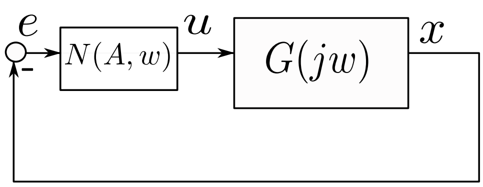
Es gilt: $u(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nwt) + b_n \cos(nwt))$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\mathrm{d}(wt), \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(nwt)\mathrm{d}(wt), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(nwt)\mathrm{d}(wt) \tag{3.1}$$

wegen $b_0 = 0$ wenn (L3) und (Z1) erfüllt, dann können Oberschwingungen vernachläßigt werden, damit
$u(t) = a_1 \sin(wt) + b_1 \cos(wt) = M \sin(wt + \varphi)$, mit $M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ $\varphi = \arctan(\frac{b_1}{a_1})$
$U = Me^{j(wt+\varphi)} = (a_1 + jb_1)e^{jwt}e(t) = A\sin(wt) \Rightarrow$ $E = Ae^{jwt}$
Beschreibungsfunktion $N(A,w) = \frac{U}{E} = \frac{a_1 + jb_1 e^{jwt}}{Ae^{jwt}}$

$$\underbrace{N(A,w) = \frac{a_1 + jb_1}{A}}_{\text{Beschreibungsfunktion}}$$

A : Amplitude der Dauerschwingung
B : Kreisfreqünz
a_1, b_1 aus (3.1)
Hinweis: Wenn f keine DGL in $e, \dot{e}$ ist, so hängt N nur von A ab.



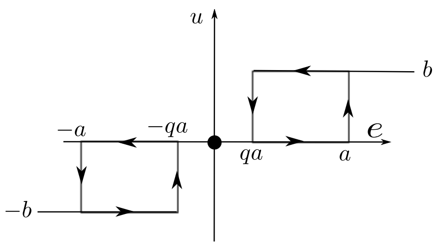
Gleichung der harmonischen Balance

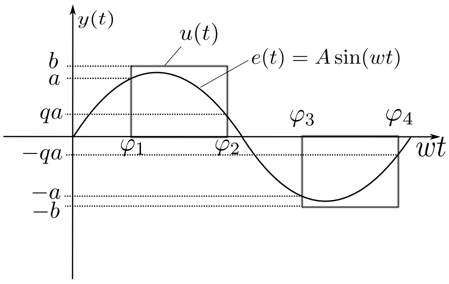
Im Schwingungsgleichgewicht gilt nach $*$ $G(jw) \cdot U = -E$ mit $U = N(A,w)E$
$\Rightarrow (G(jw)N(A,w) + 1)E = 0$
$\Rightarrow G(jw)N(A,w) + 1 = 0$
Gleichung der harm. Balance komplexe Gleichung in den Variablen A, w Lösung liefert, A, w der möglichen Dauerschwingung.

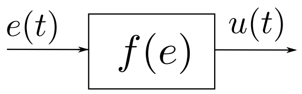
3.3 Berechnung der Beschreibungsfunktion

Spezialfälle

- $q = 1$ Dreipunktglied ohne Hysterese
  $N(A) = \frac{4b}{\pi A}\sqrt{1 - (\frac{a}{A})^2}$ $A > a$
- $q = 1, a = 0 \Rightarrow$ Zweipunktglied ohne Hysterese
  $N(A) = \frac{4b}{\pi A}$ $A > 0$
- $q = -1$ Zweipunktglied mit Hysterese
  $N(A) = \frac{4b}{\pi A} = \sqrt{1 - (\frac{a}{A})^2} - j\frac{4ab}{\pi A^2}$
  Allgemein: wenn keine Hysterese, dann Imaginäranteil (b_1) Null!







Es gilt:

$a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(t)\sin(wt)\mathrm{d}(wt)$

$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(wt)\mathrm{d}(wt)$

$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} = b\sin(wt)\mathrm{d}(wt) = \frac{2b}{\pi}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$

analog: $b_1 = \frac{2b}{\pi}\Big[\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\Big]$

Bestimmung $\varphi_1, \varphi_2, \quad A\sin\varphi_1 = a \leftrightarrow \varphi_1 = \arcsin\frac{a}{A}$

$\cos\varphi_1 = +\sqrt{1-\sin^2\varphi_1}$

$\cos\varphi_1 = \sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}$

$A\sin\varphi_2 = qa > \frac{\pi}{2}$

$\cos\varphi_2 = -\sqrt{1-(\frac{qa}{A})^2}$

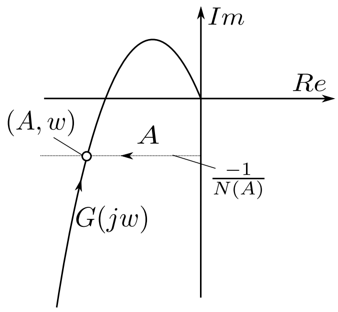
mithin:

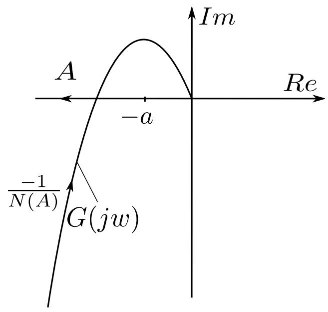
$a_1 = \frac{2b}{\pi}\left(\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2} + \sqrt{1-(\frac{qa}{A})^2}\right)$

$b_1 = \frac{2b}{\pi}\left(\frac{qa}{A} - \frac{a}{A}\right) = \frac{2ba}{\pi A}(q-1)$

$\underbrace{N(A) = \frac{a_1 + jb_1}{A}}_{\text{Dreipunktglied mit Hysterese}}$

3.4 Lösung der Gleichung der harmonischen Balance





$G(jw) + N(A,w) + 1 = 0$

analytisch:

$N(A,w) = -\frac{1}{G(jw)} \Rightarrow \mathrm{Re}(N(A,w)) = \mathrm{Re}(-\frac{1}{G(jw)})$

$\mathrm{Re}(N(A,w)) = \mathrm{Re}(-\frac{1}{G(jw)})$

graphisch in der komplexen Zahlenebene

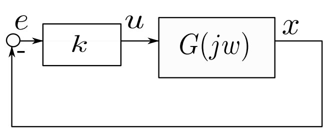
$$\underbrace{G(jw) = -\frac{1}{N(A,w)}}_{\text{negative inverse Beschreibungsfunktion}}$$

Dauerschwingungen?

$\mathrm{Im}(G(jw_0)) = 0$

$\mathrm{Re}(G(jw_0)) < -a$

3.5 Stabilität von Dauerschwingungen

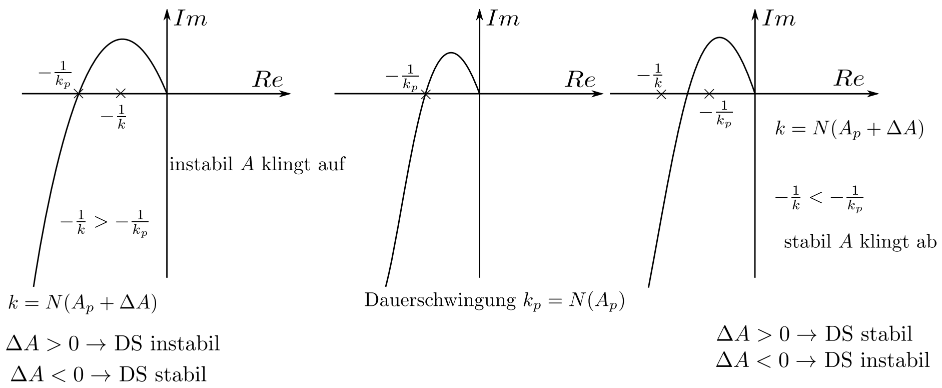


$k: \quad N(A)$

- $A = A_p \rightarrow$ Dauerschwingung $\rightarrow \begin{array}{rcl} N(A_p) & = & K_p \\ G(jw) & = & -\frac{1}{K_p} \end{array}$

  $A = A_p + \Delta A$ keine Dauerschwingung mehr

  $K = N(A_p + \Delta A)$


Im
Re
$-\frac{1}{k_p}$
$-\frac{1}{k}$
instabil A klingt auf
$-\frac{1}{k} > -\frac{1}{k_p}$
$k = N(A_p + \Delta A)$
$\Delta A > 0 \rightarrow$ DS instabil
$\Delta A < 0 \rightarrow$ DS stabil
Im
Re
$-\frac{1}{k_p}$
Dauerschwingung $k_p = N(A_p)$
Im
Re
$-\frac{1}{k}$
$-\frac{1}{k_p}$
$k = N(A_p + \Delta A)$
$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{k_p}$
stabil A klingt ab
$\Delta A > 0 \rightarrow$ DS stabil
$\Delta A < 0 \rightarrow$ DS instabil

4 Stabilität nach Ljapunov

bisher behandelt:

- Systeme 2. Ordnung
- Verhalten von Systemen höherer Ordnung schwer zu beurteilen
- Linearisierung von Ruhelagen Aussagen in Umgebung

Ljapunov-Theorie:

- Untersuchung der Stabilität von Ruhelagen, ohne die Trajektorie (Lösung) zu kennen
  1. indirekte Methode (Linearisierung)
  2. direkte Methode

4.1 Stabilitätsbegriff

Wir betrachten autonomes System der Form:

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

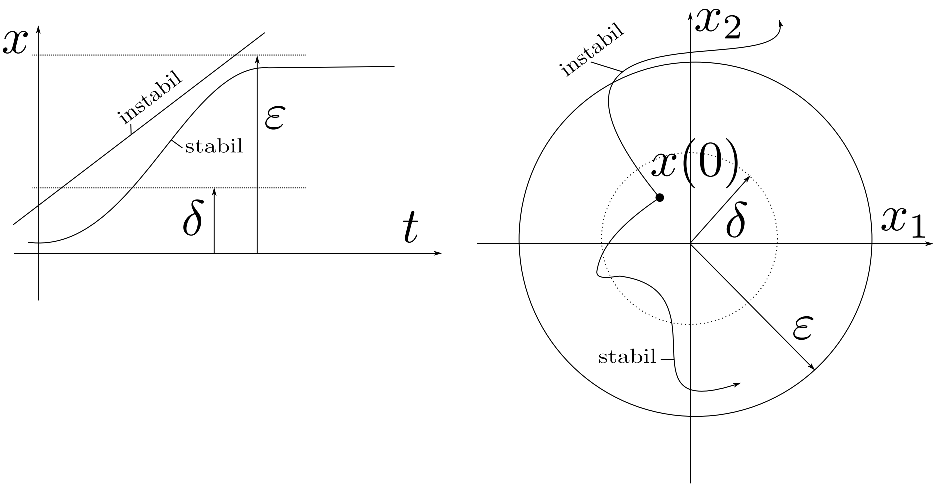
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ Anfangswert}$$

$\phi_t(x)\ldots$ Fluss von (4.1)), d.h. allgemeine Lösung
Ruhelage $x^e \in \mathbb{R}^n$ $\quad \dot{x} = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(4.1)} f(x^e) = 0 \Leftrightarrow \phi_t(x^e) = x^e$

Annahme (ohne Einschränkung): $x^e = 0$
(wenn $x^e \neq 0$, : Koordinatentransformation $\tilde{x} = x - x^e \Rightarrow \tilde{x}^e = 0$)

- **Definition 4.1:** Die Ruhelage $x^e = 0$ von (4.1)) heisst stabil (im Sinne von Ljapunov), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$||x_0|| < \delta \Rightarrow ||\phi_t(x_0)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$



– Anschaulich: Wenn die Trajektorie $\phi_t(x_0)$ die Umgebung mit dem *Radius* ε nicht verlassen soll, so muss man nahe genug an der Ruhelage $x^0 = 0$ starten, nähmlich in einer Umgebung mit Radius δ.

– Bemerkung: Instabilität heisst hier nicht , dass die Trajektorie über alle Grenzen wächst,

– Stabilität heisst hier nicht, dass die Trajektorie gegen einem Punkt konvergiert bzw. einläuft.

- **Definition 4.2:** Die Ruhelage $x^0 = 0$ von (4.1))heisst, attraktiv/anziehend, wenn es eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass
$$||x_0|| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

- **Definition 4.3:** Ist die Ruhelage $x^e = 0$ von 4.1 stabil und anziehend, dann nennt man sie *asymptotisch stabil*.

  – Hinweis: Eine anziehende Ruhelage muss nicht notwendigerweise stabil i.s. *Ljapunov* sein.

  Problem bei Definition 4.3: Keine Zeitaussage wie schnell konvergiert das?

- **Definition 4.4:** Die Ruhelage $x^e = 0$ von (4.1)) heisst *exponentiell stabil* , wenn gilt
$$\exists\, \alpha, \lambda > 0, \quad \forall t \geq 0 : \underbrace{||\phi_t(x_0)||}_{x(t)} \leq \alpha \underbrace{||x_0||}_{x(0)} e^{-\lambda t}$$
in einer Umgebung B im den Ursprung.

  – Anschaulich: Trajektorie konvergiert mindestens so schnell gegen Ursprung wie eine Exponentialfunktion

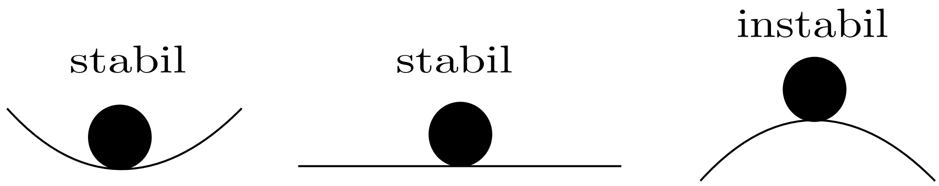
  – Es gilt: Exponentialstabilität $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Asymptotischstabilität

  – Beispiel: $\dot{x} = -(1 + \sin^2(x))x$
  $\Rightarrow x(t) = x(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \underbrace{(1 + \sin^2 x(\tau))}_{\geq 1} d\tau\right)$
  $\Rightarrow |x(t)| \leq x(0)e^{-t}$
  $\Rightarrow x^e = 0$ ist exponentiellstabil
  Bisher nur lokale Aussagen

- **Definition 4.5:** Wenn die Eigenschaften der asympt./exp.Stabilität eine Ruhelage für alle Anfangsbedingungen (= auf ganz $\mathbb{R}$) gilt, so heisst die Ruhelage *gloabl asympt./exp stabil.*

  – Hinweis:

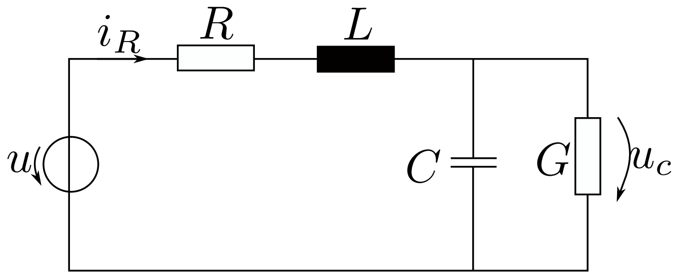
1. linear: lokal = global
2. nichtlinear: global eher selten
3. asympt. : nur, wenn es genau 1 Ruhelage gibt



4.2 Direkte (zweite) Methode von Ljapunov

- Ziel:
  Stabilitätsaussage , ohne Trajektorie (Lösung) zu kennen.
- Grundidee:
  - Wenn Gesammtenergie eins mechan. elektr. chem. kontinuierlich abnimmt, dann muss das System zur Ruhelage kommen
  - Gesammtenergie: Skalar

4.2.1 Einführungsbeispiel



$$
\begin{array}{cc}
u_c = u - R \cdot i_R - L\frac{di_R}{dt} & G(u_c) > 0 \\
i_R = G\,u_c + C\frac{du_c}{dt} & R(i_R) > 0 \\
\dot{u}_c = \frac{1}{C}(-Gu_c + i_R) & C(u_c) > 0 \\
\dot{i}_R = \frac{1}{L}(-u_c - R\,i_R + U) & L(i_R) > 0
\end{array}
$$

Kurzschluss : $U = 0$
Energie:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}L\,i_R^2 \\
\dot{V} &= Cu_c \cdot \dot{u}_c + Li_R\dot{i}_R \\
&= u_c(-Gu_c + i_R) + i_R(-U_L - Ri_R) \\
&= -\,Gu_c^2 + i_Ru_c - i_Ru_c - Ri_R^2 \\
&= -\,G\,u_c^2 - R\,i_R^2 < 0 \text{ für } (u_c, i_R) \neq (0,0)
\end{aligned}
$$

⇒Energei wird kontinuierlich abgebaut!
Verallgemeinerung: Ljapunov-Methode

4.2.2 Positiv Definite Funktionen

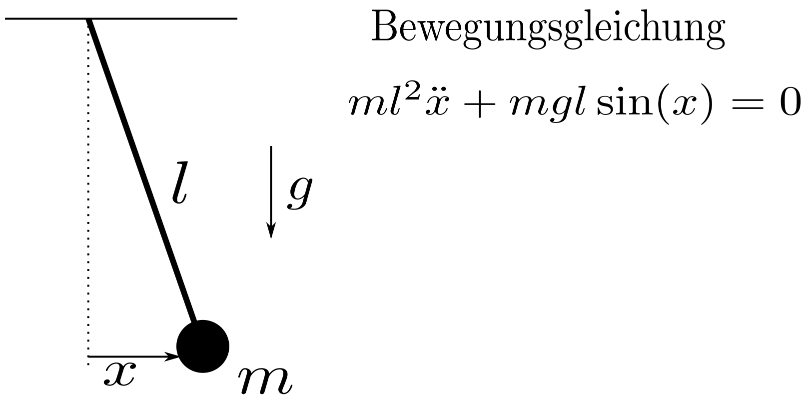
- **Definition 4.5:** Sei $D \leq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgeb. von 0.
  Eine Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ heisst *lokal positiv definit* wenn
  1. $V(x)$ ist stetig differenzierbar
  2. $V(0)$
  3. $V(x) > 0$ für alle $x \in D0$ gilt zusätzlich $D = \mathbb{R}^n$ und $\exists d > 0$ und $inf \quad V(x) > 0$, dann heisst V *positiv definit* $||x|| > d$

     Genügt V in 3. lediglich der Bed.

  3' $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in D0$ dann heisst V *(lokal) positiv semidefinit*

  $V(x)$ heisst (lokal) negativ (semi-) definit, wenn $V(x)$ (lokal) positiv (semi) definit!

- Beispiel:
  - $V(x)$ aus Abschnitt 4.2.1 ist positiv definit
  - mechanische Energie eines Fadenpendels



    $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{x}^2 + mgl(1 - \cos(x))$ positiv definit
  - kinetische Energie des Fadenpendels:
    $V^*(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{x}^2 \geq 0$
    nur positiv semidefinit: $V(x, \dot{x}) = 0$ für $\dot{x} = 0, x \neq 0$
  - $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2$ positiv semidefinit
  - $V(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3^2$ nicht positiv semidefinit $\Rightarrow$ nicht pos. definit

4.2.3 Stabilitätskriterium

- Satz 4.1: Sei $x^e = 0$ eine Ruhelage von (4.1) und $D \in \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0. Existiert eine Funktion $D \to \mathbb{R}$ derart, dass
  - $V(x)$ ist auf D positiv definit L
  - $\dot{V}(x)$ ist auf D negativ semidefinit

  dann ist $x^e = 0$ lokal stabil
  ist $\dot{V}(x)$ auf D sogar negtativ definit , dann ist x^e lokal asymptotisch stabil.
  Zu dem Fall heisst V Ljapunov Funktion

- Hinweis: $\dot{V}(x) = \mathbb{L}_f V(x)$ ist Lie-Ableitung von V entlang des Vektorfeldes f

- Vorgehen: Konstruiere zu einem System (4.1) eine Funktion $V(x)$ und zeige, dass es sich um eine Ljapunov-Funktion handelt.
- Achtung: Kriterium ist nur hinreichend (wenn $V(x)$ keine Ljapunov-Funktion, dann folgt daraus nicht, das $x_e = 0$ instabil!)
  - Beispiel: $\dot{x} = -g(x)$
    * $g(x)$ lokal Lipschitz auf (-a,a)
    * $g(0) = 0$ img1 $xg(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \wedge x \in (-a, a)$
      $V(x) = \int\limits_0^x g(\xi)d\xi \rightarrow$ positiv definit
      $\dot{V}(x) = \mathbb{L}_g V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}(-g(x)) = -g^2(x) < 0 \forall x \neq 0 \rightarrow$ negativ definit
      $x_e = 0$ lokal asymptotisch stabil.
    * Beispiel: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -a\sin(x_1) - bx_2 \end{pmatrix} \qquad a, b > 0$
      Fadenpendel mit Reibung , $a = \frac{g}{l}, b$: Reibung
      Ljapunov-Funktion Kandidat
      $V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2 \rightarrow$ positiv definit
      $\dot{V}(x) = a\sin(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = ax_2\sin(x_1) - ax_2\sin(x_1) - bx_2^2$
      $\dot{V}(x) = -bx_2^2$ negativ semidefinit $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \wedge x_1 \in \mathbb{R}$ img2 negativ semidefinit (nur Stabilität nachgewiesen!)
- **Definition:** Sei $x_e = 0$ eine asymptotisch stabile Ruhelage von (4.1). Man nennt die Menge $B = \{x_0 \in \mathrm{R}^n | \lim_{t\rightarrow\infty} \phi_t(x_0) = 0\}$ den Einzugsbereich von x_e img3
  Ist $B = \mathbb{R}^n$, so ist die Ruhelage global asymptotisch stabil

- **Definition:** Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heisst positiv invariante Menge des Systems $\dot{x} = f(x)$, wenn das Bild der Menge M under dem Fluss ϕ_t die Menge M selbst ist, d.h.
  $\phi_t(M) = M \,\forall\, t > 0$
  img4 alles,was in M startet, (oder in M hineinläuft), verbleibt in M
- **Satz 4.2:** Sei $x_e = 0$ eine Ruhelage von (4.1). Existiert eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit
  - $V(x)$ positiv definit (global)
  - $\dot{V}(x)$ negativ definit (global)
  - $V(x)$ radial unbeschränkt $\rightarrow \lim_{\|x\|\rightarrow 0} V(x) \rightarrow \infty$
    Dann ist $x_e = 0$ global asymptotisch stabil.
- **Satz 4.3:** Sei $x_e = 0$ Ruhelage des Sysems (4.1) und $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ wenn
  - $V(x_e) = 0$
  - $V(x) > 0$ für $\|x\|$ klein
  - $\dot{V}(x)$ lokal positiv definit ist dann ist x_e instabil

4.3 Invarianzprinzip (Satz von La Salle)

- Problem: Direkte Methode von Ljapuvon weist häufig nur Stabilität, aber keine asymptotische Stabilität nach (wenn $\dot{V}(x)$ nur negativ semidefinit)
- **Satz 4.4:** für ein System des Typs (4.1) sei eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben
  - Für ein $l > 0$ ist $\Omega_e = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq l\}$ kompakt (abgeschlossen/beschränkt)

– $\forall x \in \Omega_e$ gilt $\dot{V}(x) \leq 0$
– $R = \{x \in \Omega_e | \dot{V}(x) = 0\}$
– grösste positiv invariante Menge M in R bestimmen
$\Rightarrow$ dann strebt für $t \to \infty$ jede Trajektorie, die in Ω_e startet, gegen M
wenn $M = x_e$ dann ist x_e lokal asymptotisch stabil img5

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 =& x_2 && \text{(a)} \\ \dot{x}_2 =& -a\sin(x_1) - bx_2 && \text{(b)} \\ R =& \{x \in \Omega_e | x_2 = 0\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$x_2 \equiv 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(a)} \dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0$
$(b) \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow M = (0,0) = x_e \qquad x_e = 0$ lokal asymptotisch stabil

4.4 Variable Gradientenmethode

- Ziel: Systematische Konstruktion einer Ljapunov-Funktion.
- Beispiel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 =& x_2 && \text{((4.3) Ruhelage } x_e = (0,0)) \\ \dot{x}_2 =& -x_2 - x_1^3 && (4.2) \end{aligned}$$

Vorgabe eines Gradienten für skalare Funktion $V(x)$
$(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(\underline{x})x_1 + V_{12}(\underline{x})x_2 \\ V_{21}(\underline{x})x_1 + V_{22}(\underline{x})x_2 \end{pmatrix}$ Integrabilitätsbedingungen müssen erfüllt sein
$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad i \neq j$

- Erinnerung: Ist $(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}})^T$ ein Gradient von $V(\underline{x})$ so ist das Integral über $(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}})^T$ wegunabhängig
Für (4.3) lauten Integrabilitätsbedingung
$\frac{\partial}{\partial x_2} = (V_{11}(\underline{x})x_1 + V_{12}(\underline{x})x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(V_{21}(\underline{x})x_1 + V_{22}(\underline{x})x_2)$
$\frac{V_{11}(\underline{x})}{\partial x_2}x_1 = \underbrace{\frac{\partial V_{12}(\underline{x})}{\partial x_2}}_{=0} x_2 + V_{12}(\underline{x}) = \underbrace{\frac{\partial V_{21}(\underline{x})}{\partial x_1}}_{=0} x_1 + V_{21}(\underline{x}) + \frac{\partial V_{22}(\underline{x})}{\partial x_1}x_2$

- Wahl: $\left.\begin{array}{rcl} V_{12}(\underline{x}) & = & V_{21}(\underline{x}) = b \\ V_{11}(\underline{x}) & = & a(x_1) \\ V_{22}(\underline{x}) & = & c(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} a(x_1)x_1 + bx_2 \\ bx_1 + c(x_2)x_2 \end{pmatrix}$
Festlegung von $a(x_1), c(x_2)$ und b, so dass $\dot{V}$ negativ definit
$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = -bx_1^4 + (b - c(x_2))x_2^2 + \underbrace{(a(x_1) - b - c(x_2)x_1^2)x_1x_2}_{term0}$
muss negativ definit sein!
$\begin{array}{rcl} a(x_1) & = & b + c(x_2)x_1^2 \\ c(x_2) & = & d \end{array}$ damit $term0 = 0$

- liefert: $\dot{V} = -bx_1^4 + \underbrace{(b-d)}_{term1} x_2^2$

- Wahl: $d > b \rightarrow$ damit $term1 < 0$ negativ definit
  Bestimmung von V Integration von $(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}})^T$ über x_1, x_2 da wegunabhängig
  $V(x) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1}(\xi, 0) + \int\limits_0^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, \xi) d\xi$

$$\begin{aligned}
V(x) =& \frac{d}{4}x_1^2 + \frac{b}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + \frac{d}{2}x_2^2 \text{ muss positiv definit sein!} \\
=& \frac{b}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - \frac{b}{2}x_2^2 + \frac{d}{2}x_2^2 \\
=& \frac{d}{2}(x_1 + x_2)^2 + (\frac{d}{2} - \frac{b}{2})x_2^2
\end{aligned}$$

  positiv deinit für $b > 0$ und $d > b$

B: Regelung nichtlinearer Systeme

B.1: Stabilisierungsprobleme

- Asymptotische Stabilisierung
  Nichtlinearer System: $\dot{x} = f(x, u, t)$
  Regelgesetz finden $u = g(\cdot, t)$ so dass wenn $x_0 \in \Omega, \quad \phi_t(x_0) \to 0$ für $t \to \infty$
  $u = g(x, t) \to$ statisches Regelgesetz $\dot{u} = g(u, x, \dot{x}, t) \to$ dynamisches Regelgesetz
  wenn $\phi_t(x_0) \to x_d$ gewünscht, dann Transformation $x^* = x - x_d$
- Folgeregelungsproblem
  System: $\dot{x} = f(x, u, t) \quad y = h(x)$
  Solltrajektorie für y : $y_d(t)$
  Regelgesetz $u = g(\cdot, t)$, so dass,wenn $x_0 \in \Omega \quad y(t) - y_d(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und x beschränkt.

B.2: Einführungbeispiel

System:

$$\begin{aligned} \dot{x} =& ax - bx^3 + u & a, b > 0 \\ y =& x & x, u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Regelgesetz 1 Wunsch u so dass geschlossene Kreis folgender Dynamik genügt

$$\dot{x} = -kx \quad k > 0$$

Wahl:

$$\begin{aligned} u =& -ax + bx^3 - kx & \text{Reglerparameter: k} \\ u =& -(k + a)x + bx^3 & k > 0 \end{aligned}$$

Regelgesetz kompensiert auch den Term $-bx^3$.
Sinnvoll? Nein, denn $-bx^3$ ist eine nichtlineare Dämpfung, die dafür sorgt dass x stets beschränkt ist, auch wenn ax für Instabilität sorgt.
Folgendes Regelgesetz 2 reicht
$u = -(k + a)x \quad \to \dot{x} = -kx - bx^3 \quad x = 0$ asymptotisch stabil

	+Vorteil	-Nachteil
Regelgesetz 1	exponentielle Stabilisierung	Implementierungsaufwand
Regelgesetz 2	Einfachheit	nur asymptotisch Stabilisierung

B.3: Vorsteuerung

In nichtlinearer Regelungsaufgaben ist die Vorsteuerung häufig wichtig

- liefert Information für Überführungsaufgaben
- kompensiert bekannte Störungen
  Bild1. Regler kompensiert nur Fehler in der Steuerung und Störungen Bild2

5 Intergrator-Backstepping

5.1 Einführungsbeispiel

System:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \tag{5.3a}$$
$$\dot{x}_2 = u \tag{5.3b}$$

- Schritt 1: Stabilisierung des 1. Teilsystems
  $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + \underbrace{x_2}_{=\alpha(x_1)}$ $\rightarrow$ Betrachtung als neuer Eingang mit dem Regelgesetz $x_2 = \alpha(x_1)$

  $$\rightarrow \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + \alpha(x_1) \tag{5.4}$$

  sinnvolle Wahl (vergl. Abschnitt **B.2**)
  $\alpha(x_1) = -x_1^2 - k_1 x_1 \qquad k_1 > 0$
  Damit Dynamik geschlossenen Kreises des 1. Teilsystems: $\dot{x}_1 = -x_1^3 - k_1 x_1$
  Stabil?

  $$\begin{aligned} V_1(x_1) =& \frac{1}{2} x_1^2 \text{ positiv definit radial unschränkt} \\ V_1(x_1) =& \frac{1}{2} x_1^2 \\ \dot{V}_1(x_1) =& x_1 \dot{x}_1 = -x_1^4 - k_1 x_1^2 \text{ negativ definit} \end{aligned}$$

  ja global asymptotisch stabil

- Schritt 2: Fehler in $\alpha(x_1)$
  $\rightarrow$ x_2 muss sich so verhalten , wie durch $\alpha(x_1)$ gefordert. Real ergibt sich jedoch Fehler:

  $$\begin{aligned} z_2 :=& x_2 - \alpha(x_1) \\ =& x_2 + x_1^2 + k_1 x_1 \end{aligned}$$

  z_2 muss gegen Null gehen, damit $x_2 = \alpha(x_1)$ erfüllt und somit auch $x_1 \rightarrow 0$ geht. Also wird

Differentialgleichung für z_2 benötigt

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 =& \dot{x}_2 + 2x_1\dot{x}_1 + k_1\dot{x}_1\\ =& \underbrace{\dot{x}_2}_{5.3b} + (2x_1 + k_1)\underbrace{\dot{x}_1}_{5.3a}\\ \dot{z}_2 =& u + (2x_1 + k_1)(x_1^2 - x_1^3 + \overbrace{z_2 + \alpha(x_1)}^{=x_2})\end{aligned}$$

System in neuen Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 =& x_1^2 - x_1^3 + z_2 - \underbrace{x_1^2 - k_1 x}_{\alpha(x_1)}\\ \dot{x}_1 =& -x_1^3 - k_1x_1 + z_2 && \text{(5.5a)}\\ \dot{z}_2 =& u + (2x_1 + k_1)(-x_1^3 - k_1x_1 + z_2) && \text{(5.5b)}\end{aligned}$$

- Schritt 3: Wie u wählen , damit $z_2 \to 0$

$$\begin{aligned}V_2(x_1, z_2) =& V_1(x_1) + \frac{1}{2}z_2^2\\ \dot{V}_2(x_1, z_2) =& x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 = \underbrace{-x_1^4 - k_1x_1^2 + x_1z_2 + z_2(u + (2x_1 + k_1)(-x_1^3 - k_1x_1 + z_2))}_{\to \text{ muss negativ definit sein } \to u!}\end{aligned}$$

$\dot{V}_2$ ist zum Beispiel wie folgt negativ definit
$\dot{V}_2(x_1, z_2) = -x_1^4 - k_1x_1^2 - \underbrace{k_2z_2^2}_{u \text{ so wählen,dass das gilt}} \qquad k_1, k_2 > 0$
$u = -k_2z_2 - (2x_1 + k_1)(-x_1^3 - k_1x_1 + z_2) - x_1$
$\to$ Regelgesetz mit $z_2 = x_2 + x_1^2 + k_1x_1$ und Parameter $k_1, k_2 > 0$

5.2 Verallgemeinerung

Systemklasse

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}_1} =& \underline{f}(\underline{x_1}) + \underline{g}(\underline{x_1})x_2\\ \dot{x}_2 =& u\\ &\underline{x}_1 \in \mathbb{R}^n\\ &x_2 \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- Schritt 1: Stabilisierung 1.Teilsystem $x_2 = \alpha(\underline{x}_1)$ *fiktives Regelgezetz*
  $\underline{\dot{x}_1} = \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)\alpha(\underline{x}_1)$
  Ruhelage $\underline{x}_1 = 0$ ist zu stabilisieren $\Rightarrow \alpha(\underline{x}_1)$ entsprechend wählen.
  Ljapunov-Funktion $V(\underline{x}_1)$ positiv definit
  üblicherweise:

$$\begin{aligned}V(\underline{x}_1) =& \frac{1}{2}x_{11}^2 + \cdots + \frac{1}{2}x_{1n}^2\\ \dot{V}(\underline{x}_1) =& \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1}V(\underline{x}_1)(\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)\alpha(\underline{x}_1))\end{aligned}$$

$\alpha(\underline{x}_1)$ so, dass gilt $\dot{V}(\underline{x}_1) \leq W(\underline{x}_1) \leq 0$

- Schritt 2: Fehler zwischen x_2 und $\alpha(\underline{x}_1)$
  Fehler: $z_2 = x_2 - \alpha(\underline{x}_1) \rightarrow$ neue Koordinate
  alte Koordinaten. $(\underline{x}_1, x_2)$
  neue Koordinaten. $(\underline{x}_1, z_2)$
  Stabilisieren :

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 =& 0 \\ z_2 =& 0 \end{aligned}$$

  siehe oben damit Fehler zwischen x_2 und $\alpha(\underline{x}_1) = 0$
  System in neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}_1} =& \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1)) \\ \dot{z}_2 =& \dot{x}_2 - \dot{\alpha}(\underline{x}_1) \\ =& u - \frac{\partial \alpha(\underline{x}_1)}{\partial \underline{x}_1}(f(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1))) \end{aligned}$$

- Schritt 3: Wahl von u so, dass auch $z_2 = 0$ asymptotisch stabil.
  $V_2(\underline{x}_1, z_2) = V_1(\underline{x}_1) + \frac{1}{2}z_2^2$ positiv definit, radial unbeschränkt

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\underline{x}_1, z_2) =& \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_1}\underline{\dot{x}_1} + z_2\dot{z}_2 \\ =& \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_1}\left(\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1))\right) + z_2\left(u - \frac{\partial \alpha(\underline{x}_1)}{\partial \underline{x}_1}(\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1)))\right) \\ =& \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)\alpha(\underline{x}_1))}_{\leq W_1(\underline{x}_1) \text{ negativ definit}} + \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_1}\underline{g}(\underline{x}_1)z_2 + z_2\left(u - \frac{\partial \alpha(\underline{x}_1)}{\partial \underline{x}_1}(\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1))(z_2 + \alpha(\underline{x}_1))\right)}_{\text{negativ definit machen über Wahl von } u} \end{aligned}$$

  $u \rightarrow$ so, dass $\dot{V}_2$ negativ definit
  fehlt etwas hier

Anmerkungen:

a) Systeme des Typs

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 \in& \mathbb{R}^n \\ x_2, u \in& \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}}_1 =& \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)x_2 \\ \dot{x}_2 =& f_2(\underline{x}_1, x_2) + \underline{g}_2(\underline{x}_1, x_2)u \end{aligned}$$

   Wahl eines neuen Eingangs u^* mit $u^* = \frac{1}{g_2(\underline{x}_1, x_2)}(u - f_2(\underline{x}_1, x_2))$
   führt auf

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}_1} =& \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)x_2 \\ \dot{x}_2 =& u^* \end{aligned}$$

b) Systeme in *strict feedback form*

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= f_0(\underline{x})x_1 && x \in \mathbb{R}^n \\
\dot{x}_1 &= f_1(\underline{x}, x_1) + g_1(\underline{x}, x_1)x_2 && x, u \in \mathbb{R} \\
&\vdots && i = 1, \dots, k \\
\dot{x}_k &= f_k(\underline{x}, x_1, \dots, x_k) + g_k(\underline{x}, x_1, \dots, x_k)u
\end{aligned}$$

Backsteppingschnitte mehrfach von oben nach unten wiederholen.
Einführungsbeispiel:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_1^2 - x_1^3 + x_2 && a \text{ ist unbestimmmt} \\
\dot{x}_2 &= u && 0 < a_{min} \leq a \leq a_{max} \text{ Normalwert für Entwurf } a_0
\end{aligned}$$

1. Fiktiver Eingang: $x_2 = \alpha(x_1)$

$$\begin{aligned}
V_1(x_1) &= \frac{1}{2}x_1^2 \\
\dot{V}_1 &= x_1(ax_1^2 - x_1^3 + \alpha(x_1)) \\
&= -x_1^4 + ax_1^3 + x_1\alpha(x_1)
\end{aligned}$$

Wahl: $\alpha(x_1) = -a_0x_1^2 - k_1x_1$
dann
$\dot{V}_1 = -x_1^4 - k_1x_1^2 + \underbrace{(a - a_0)x_1^3}_{\text{kann negativ Definitheit von } \dot{V} \text{ zerstören}}$ kann k_1 so gewählt werden, dass $\dot{V}_1$ negativ definit?

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -x_1^4 + (a - a_0)x_1^3 - k_1x_1^2 \\
&= -x_1^2(x_1^2 - (a - a_0)x_1 + k_1) \\
&= -x_1^2(x_1^2 - (a - a_0)x_1 + \frac{(a - a_0)^2}{4} - \frac{(a - a_0)^2}{4} + k_1) \\
&= -x_1^2\left((x_1 - \frac{a - a_0}{2})^2 + k_1 - \frac{(a - a_0)^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

fehlt einiges

6 Sliding-Mode-Control

Gleitregime-Regelung!
Grundidee: Es ist einfacher ein System erster Ordnung zu regeln, als ein System n ter Ordnung $n > 1$

- Problem $n-$ter Ordnung in Problem $1.$Ordnung überführen.
  Vorgehen: System auf Gleitfläche bringen und entlang dieser in die Ruhelage überführen. Im1.

6.1 Einführungsbeispiel

System:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{6.1a}$$
$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x)u \qquad g(x) > 0 \tag{6.1b}$$

Ruhelage: $\underline{x}_e = (0, 0)$
Ruhelage von $x_1 : 0$ stabil, wenn gelten würde

$$\dot{x}_1 = -ax_1 \qquad a > 0$$

Wie Realisierung?
Definition einer Gleitfläche

$$s = x_2 + ax_1 \tag{6.2}$$

Dann gilt mit (6.1a)

$$\dot{x}_1 = x_2 = s - ax_1$$

Wenn sichergestellt wird, dass $s = 0$, dann gilt tatsächlich $\dot{x}_1 = -ax_1$
$\Rightarrow x_1 \to 0 \quad$ für$t \to \infty$, da $s = 0$ gilt auch wegen (6.2). $x_2 \to 0$ für $x_1 \to 0$
Wie stellt man sicher, dass $s = 0$?
Es gilt:

$$\begin{aligned} s &= x_2 + ax_1 \\ \dot{s} &= \dot{x}_2 + ax_1 - f(x) + g(x)u + ax_2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Es soll gelten: $s = 0$, also Stabilität von $s = 0$ mit (6.3) untersuchen.
Direkte Methode von Ljapunov

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}s^2 \\ \dot{V} &= s\dot{s} = s(f(x) + g(x)u + ax_2) < 0 \qquad \forall \quad s \neq 0 \end{aligned}$$

$$f(x) + g(x)u + ax_2 \begin{cases} < 0 & \text{für } s > 0 \\ > 0 & \text{für } s < 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

$$u \begin{cases} < & -\frac{f(x)+ax_2}{g(x)} g(x) & \text{für } s > 0 \\ > & -\frac{f(x)+ax_2}{g(x)} & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

$$u = -\frac{f(x) + ax_2}{g(x)} - K sgn(s) \qquad K > 0 \tag{6.4}$$

$$\text{mit } s = ax_1 + x_2$$

6.2 Verallgemeinerung

Systemklasse:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 =& x_2 \\ \dot{x}_2 =& x_3 \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} =& x_n \\ \dot{x}_n =& f(\underline{x}) + g(\underline{x})u \qquad y = x_1 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$f(\underline{x})$ nicht genau bekannt, aber nach oben durch stetige Funktion beschränkt $g(x)$ nicht genau bekannt,aber von bekannten festen Vorzeichen und durch bekannte stetige Funktion beschränkt!

Ziel: Zustand $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ einer Solltrajektorie $\underline{x}_{ref} = (x_{1,ref}, \ldots, x_{n,ref})^T$ nichtführen.

Regelabweichung:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{x}} =& \underline{x} - \underline{x}_{ref} \\ \tilde{y} =& x_1 - x_{1,ref} \\ s(\underline{x}, t) =& (\frac{t}{dt} +)^{n-1} \tilde{y} \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\tilde{y} + 2\lambda \frac{d}{dt}\tilde{y} + \lambda^2 \tilde{y}$$

Es soll gelten: $s(\underline{x}, t) = 0 \approx$ Bewegung auf der Gleitfläche
$s = 0 \Rightarrow (\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1}\tilde{y} = 0$ lineare Differenzialgleichung $(n-1)$ ter Ordnung
Lösung: $\tilde{y} = 0 \Rightarrow \tilde{\underline{x}} = 0$
$\rightarrow$ Skalarer s auf 0 halten, Reduktion eines Problems n.ter Ordnung ($\underline{x} = \underline{x}_{ref}$) auf ein Problem 1.Ordnung ($s = 0$)
Forderung, damit $s = 0$ gehalten wird.

$$V = \frac{1}{2}s^2 \rightarrow V = s\dot{s} < 0 \qquad \forall \quad s \neq 0$$

bzw. mit Sicherheitsabstand $\dot{V} = s\dot{s} \leq -\eta|s| < 0 \qquad \forall \quad s \neq 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -\eta|s| \text{ sogenannte Gleitbedingung} \tag{6.8}$$

Reglerentwurf auf Basis von (6.7) und (6.8)
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} =& f(x,\dot{x},t)+u \\
\text{mit } f(x,\dot{x},t) =& -a(t)\dot{x}^2\cos(3x) \\
y =& x \\
1 \leq a(t) &\leq 2
\end{aligned}
$$

1. Wahl der Gleitfläche $(n=2)$
   $s = (\frac{d}{dt}+\lambda)\tilde{y} = \dot{\tilde{y}} + \lambda\tilde{y} \qquad \tilde{y} = y - y_{ref}$
   $\dot{s} = \ddot{\tilde{y}} + \lambda\ddot{\tilde{y}}$
   $\dot{s} = \underbrace{f(x,\dot{x},t)+u-\ddot{x}_{ref}(t)+\lambda\dot{\tilde{x}}(t)}_{\ddot{\tilde{x}}=\ddot{\tilde{y}}}+\lambda\dot{\tilde{x}}$

2. Gleitbedingung
   $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -\eta|s|$
   $s\dot{s} = s(f(x,\dot{x},t)+u-\ddot{x}_{ref}(t)+\lambda\dot{\tilde{x}}(t)) \leq \eta|s|$
   $-a(t)\dot{x}^2\cos(3x)+u-\ddot{x}_{ref}+\lambda\tilde{x}\begin{cases}\leq -\eta & \text{für } s>0\\ \geq \eta & \text{für } s<0\end{cases}$
   $a(t) \rightarrow$ nicht genau bekannt a darf nicht explizit im Regelgesetz vorkommen
   $u\begin{cases}\leq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}+a\dot{x}^2\cos(3x)-\eta & \text{für } s>0\\ \geq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}+a\dot{x}^2\cos(3x)+\eta & \text{für } s<0\end{cases}$
   $u\begin{cases}\leq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}-\dot{x}^2a|\cos(3x)|-\eta\\ \geq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}+\dot{x}^2a|\cos(3x)|+\eta\end{cases}$

   $1 \leq a \leq 2$ worstcase $a=2$

   $u\begin{cases}\leq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}-\dot{x}^2 2|\cos(3x)|-\eta\\ \geq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}+\dot{x}^2 2|\cos(3x)|+\eta\end{cases} \Rightarrow u = x_{ref}-\lambda\tilde{x}-(2\dot{x}^2|\cos(3x)|+\eta)sgn(s)$ mit $s = \dot{y}+\lambda y$

   $u \leq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}-2\dot{x}^2|\cos(3x)|-\eta \leq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}-\dot{x}^2|\cos(3x)|-\eta \leq \ddot{x}_{ref}-\lambda\tilde{x}+a\dot{x}^2\cos(3x)-\eta$
   Reglerparameter:
   $\eta \rightarrow$ stellt ein wie schnell $s \rightarrow 0$
   λ stellt Fehlerparameter in $\tilde{y}$ ein

7 Feedbacklinearisierung

7.1 Fehlt etwas

7.1.1 fehlt etwas

System:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 =& \sin(\dot{x}_2) + (x_2+1)x_3 \\ \dot{x}_2 =& \dot{x}_1^2 + u \\ y =& x_1 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Schritt 1: y solange ableiten, bis u auftaucht.

$$\begin{aligned} y =& x_1 \\ \dot{y} =& \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)\dot{x}_3 \\ =& \underbrace{(\cos(x_2) + x_3)(x_1^5 + x_3) + (x_2+1)x_1^2 + (x_2+1)u}_{f_1(\underline{x})} \end{aligned} \tag{7.6}$$

u taucht in 2.Ableitung von y auf $\Rightarrow$ man sagt, das System habe den relativen Grad 2.
Schritt 2:
Wahl von u so, dass ein linearer Zusammenhang zwischen $\ddot{y}$ und einem neuen (fiktiven) Eingang v entsteht.
Einfachst möglichstes Wunschsystem: $\ddot{y} = v$
Also Wahl u:

$$u = \frac{1}{x_2+1}(v - f_1(\underline{x})) \tag{7.7}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = v \tag{7.8}$$

Schritt 3: Stabilisierung von (7.8) durch geeignete Wahl von v (lineare Methoden!)
$y \rightarrow y_{ref}$ für $t \rightarrow \infty$

$$\begin{gathered} v = \ddot{y}_{ref} - K_1(\dot{y} - \dot{y}_{ref}) - K_0(y - y_{ref}) = 0 \\ K_1, K_0 > 0 \Rightarrow \text{ stabil } = y \rightarrow y_{ref} \end{gathered} \tag{7.9b}$$

Schritt 4: Stellgesetz angeben
(7.9a) in (7.7)

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}(\ddot{\tilde{y}} + K_1\dot{\tilde{y}} + K_0\tilde{y} - f_1(\underline{x})) \qquad (7.10)$$
$$\tilde{y} = y - y_{ref}$$

den System wird eine lineare Fehlerdynamik aufgeprägt
Schritt 5: Überprüfung
2 Probleme

a) wenn $x_2 = -1$ dann Stellgesetz (7.10) bzw. (7.7) nicht definiert! Ausserdem ist der relative Grad dann nicht mehr 2 (nicht wohldefiniert)

b) Regler sorgt für eine stabile Dynamik 2.Ordnung, das System ist jedoch 3.Ordnung
$\Rightarrow$ Es gibt eine interne Dynamik, die durch die Eingangs-Ausgangs-Linearisierung (unsichtbar) wird, wenn diese instabil, so ist der Regler damit ungeeignet!

7.1.2 Relativer Grad

Das System (7.4) hat an der Stelle $x_0 \in D$ den relativen Grad r, wenn gilt

$$L_g L_F^K h(\underline{x}) = 0 \text{ für } K = 0, 1, \ldots, r-2$$
$$L_G L_F^{r-1} h(\underline{x}) \neq 0 \qquad \forall x \in D$$

Erinnerung $L_f h(x) = \varDelta h \underline{f} = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \underline{f}(x)$
entlang des Vektorfeldes $\underline{f}$

$$\begin{aligned}
{L_f}^i h &= L_f({L_f}^{i-1} h)\\
L_g L_f h &= \varDelta(L_f h) g\\
y &= h(\underline{x})\\
\dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}}(\underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(x)u)\\
&= \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \underline{f}(x) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \underline{g}(x)}_{0} u\\
\ddot{y} &= {L_f}^2 h(\underline{x}) + \underbrace{L_g L_f h(\underline{x})}_{=0} u
\end{aligned}$$

fehlt einiges

7.1.3 Verallgemeinerter Entwurf

System (7.4), $r < n$
Schritt 1: Eingangs-Ausgangs-Zusammenhang erzeugen (y solange ableiten, bis u auftaucht)

$$\begin{aligned}
y &= h(\underline{x})\\
&\vdots\\
y^{(r)} &= L_f^r h(\underline{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\underline{x}) u
\end{aligned}$$

mit $L_g L_f^{r-1} h(\underline{x}) \neq 0 \qquad \forall x \in D$ Schritt 2: u so, dass ein Zusammenhang entsteht.
Wunsch:

$$y^(r) = V \Rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\underline{x})}(V - L_f^r h(\underline{x})) \tag{7.11}$$

Schritt 3: Stabilisierung von (7.11) durch Wahl von V
$V = y_{ref}^{(r)} - K_{r-1}\tilde{y}^{(r-1)} - \cdots - K_1\ddot{\tilde{y}} - K_0\tilde{y} \qquad \tilde{y} = y - y_{ref}$ mit $K_{r-1}, \ldots, K_0$ so, dass Wurzeln des char. Polynoms alle in der LHE liegen!